

Untersuchungen über eine spezielle Klasse von Zerlegungen eines kompakten, metrischen Raumes

von
Manfred Denker
aus
Breslau

1972



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548824_0013

Untersuchungen über eine spezielle Klasse von Zerlegungen eines kompakten, metrischen Raumes

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Manfred Denker

aus

Breslau

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 29.11.1972

Dekan: Prof. Dr. W. Heumann

Erstberichterstatter: Prof. Dr. K. Jacobs

Zweitberichterstatter: Prof. Dr. H. Bauer

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	... 1
Kapitel 1	... 4
§1: Topologische Zerlegungen	... 4
§2: Einbettung dynamischer Systeme in Teilshifts	...20
Kapitel 2	...40
§1: Topologische Zerlegungen und offene Überdeckungen	...40
§2: Topologische Erzeuger	...53
§3: Entropie transportierter Maße	...72
Literaturverzeichnis	...94

EINLEITUNG

In einem metrischen, kompakten Raum X soll eine spezielle Klasse von Zerlegungen (des Raumes X) - die Menge der topologischen Zerlegungen - untersucht werden. Sie ist durch zwei Eigenschaften charakterisiert: Zunächst einmal besitzt jedes Element einer Zerlegung nicht leeres Inneres, und weiterhin soll die Gesamtheit der inneren Punkte eine in X dichte Teilmenge bilden.

Es gibt in der Literatur einige Ansätze in der Untersuchung solcher Zerlegungen - systematisch wurden jedoch nur sogenannte Markoffzerlegungen (vgl. Sinai [19] und Bowen [4]) untersucht. Sie sind beim Studium von C -Diffeomorphismen überaus nützlich und führten zu tiefliegenden Ergebnissen. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, sei noch erwähnt, daß von Goodwyn [9] und Dinaburg [7] eine Klasse von Überdeckungen mit ähnlichen Eigenschaften benutzt wurde.

Für einen Homöomorphismus $T:X \rightarrow X$ kann man ein Analogon zur topologischen Entropie definieren. Diese Größe soll im ersten Paragraphen generell untersucht werden. Der zweite Paragraph des ersten Kapitels beschäftigt sich mit speziellen punktgetrennenden topologischen Zerlegungen - auch als Erzeug-

ger bezeichnet. Es wird mit ihrer Hilfe eine stetige Abbildung $g:\Omega\rightarrow X$ konstruiert, wobei Ω ein Teilshift ist, im allgemeinen mit unendlich vielen Symbolen. Diese Konstruktion lehnt sich an Bekanntes an: Bowen [3],[4], Reddy [17] und Keynes, Robertson [14] haben schon Abbildungen ähnlicher Bauart konstruiert.

Die Frage nach der Existenz von Erzeugern löst Paragraph 2 des zweiten Kapitels: Man kann stets eine Zerlegung finden, die punktettrennend für die Menge der aperiodischen Punkte ist. Dies ist schon bekannt, wenn (X,T) expandierend ist (Reddy [17]), oder wenn man fast sichere Punktettrennung haben will (Parry [16], Roklin [18]). Die allgemeine Konstruktion läßt noch viel Freiheit für die Wahl der Elemente der Zerlegung.

Es werden nun gerade solche Eigenschaften den Zerlegungselementen gegeben, daß man eine Beziehung zwischen der Entropie eines normierten, schiebungsinvarianten Borelmaßes μ auf Ω und der Entropie seines mittels g nach X transportierten Maßes $g\mu$ erhält. Dies beinhaltet Paragraph 3 in Kapitel 2.

Durch diese Beziehung kann man die in den Arbeiten von Goodwyn [9], Dinaburg [7] und Goodman [8] offen gebliebene Frage nach der Existenz von Maßen auf X mit maximaler Entropie auf den leichter zu untersuchenden Fall zurückspielen, in dem X

ein Teilshift (mit unendlich vielen Symbolen) ist.

Im Falle, daß (X, T) ein minimales System ist, kann man den Erzeuger so konstruieren, daß das zugeordnete symbolische dynamische System (Ω, S) minimal ist. Hat man zudem strikte Ergodizität für (X, T) , so kann erreicht werden, daß auch (Ω, S) strikt ergodisch ist. Sämtliche strikt ergodischen Systeme kommen also als stetige Bilder symbolischer dynamischer Systeme unter einer Abbildung g vor, und diese Abbildung g ist ein Maßisomorphismus.

Ich möchte Herrn Professor K. Jacobs für sein Interesse, seine hilfreichen kritischen Bemerkungen und überhaupt für seine Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit danken.

KAPITEL 1

TOPOLOGISCHE ZERLEGUNGEN

Kolmogorov führte im Jahre 1959 den Begriff der maßtheoretischen Entropie ein, und sechs Jahre später definierten Adler, Konheim und McAndrew ([1]) die topologische Entropie. Ein Analogon hierzu soll im ersten Kapitel untersucht werden. Es ist ebenfalls eine Isomorphieinvariante für Homöomorphismen. Der eigentliche Grund für die Untersuchung ist diese Invarianzeigenschaft jedoch nicht. Man möchte vielmehr eine möglichst gute Einbettung eines Systems (X, T) in den Shiftraum $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ finden; das soll heißen, es gibt einen Homöomorphismus $f: X_0 \rightarrow \Omega \subset \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ - wobei X_0 dicht in X ist -, sodaß f^{-1} stetig zu einer Abbildung g fortgesetzt werden kann. Es übertragen sich dann durch g verschiedene Eigenschaften von $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ auf X .

Es soll mit (X, T) also immer ein dynamisches System bezeichnet werden, in dem X ein kompakter, metrischer Raum mit Metrik $d(\cdot, \cdot)$ und $T: X \rightarrow X$ ein Homöomorphismus ist.

§ 1 Topologische Zerlegungen

Mit $\mathbb{N}$ werden die natürlichen und mit $\mathbb{Z}$ die ganzen Zahlen bezeichnet.

Zunächst soll gesagt werden, was topologische Zerlegungen sind. Für $A \subset X$ sei $\text{In } A$ das topologisch Innere und $\bar{A}$ der topologische Abschluß von A . Mit $|M|$ bezeichnen wir die Mächtigkeit

keit der Menge M . Eine Zerlegung des Raumes X ist eine Menge $a = \{A_i \mid i \in I\}$ von Teilmengen in X , die paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung X ist. Sind a und b Zerlegungen von X , so wird durch

$$a \vee b := \{A \cap B \mid A \in a, B \in b\}$$

eine neue Zerlegung von X definiert, die sogenannte Verfeinerung von a und b . Induktiv können wir dann wegen der Assoziativität und Kommutativität der Durchschnittsbildung

für endlich viele Zerlegungen $a_1, \dots, a_n$
 $\bigvee_{i=1}^n a_i := (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_{n-1}) \vee a_n$ setzen. Mit diesen Erklärungen läßt sich folgende Definition formulieren:

Definition 1.1.1:

1. Eine abzählbare Zerlegung $a = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von X heißt eine topologische Zerlegung von X , wenn $\text{In } A_n \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{In } A_n} = X$ gilt.
2. Für eine endliche Zerlegung von X definieren wir

$$N(a) := \#\{A \in a \mid \text{In } A \neq \emptyset\}$$

$$\overline{H}_k(a) := \log N \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i} a \right) \quad (k \in \mathbb{N})$$

(Der Logarithmus sei wie üblich zur Basis 2 verstanden!)

Folgt man dem üblichen Weg zur Einführung der Entropie, so wird man zuerst das folgende Lemma beweisen:

Lemma 1.1.1:

Sei a eine endliche topologische Zerlegung von X .

Dann existiert $\overline{H}(T, a) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \overline{H}_n(a)$.

Beweis:

Es ist offenbar hinreichend, $\overline{H}_{n+m}(a) \leq \overline{H}_n(a) + \overline{H}_m(a)$ zu beweisen. (Man vergleiche die entsprechenden Beweise für die topologische und die maßtheoretische Entropie!)

Man bemerkt sofort, daß aus der Stetigkeit von T und T^{-1}

und aus $\bigcap_{k=0}^{n+m-1} T^{-k} A_{i_k} \neq \emptyset \quad (A_{i_k} \in a; 0 \leq k \leq n+m-1)$

sowohl $\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k} A_{i_k} \neq \emptyset$ als auch $\bigcap_{k=0}^{m-1} T^{-k} A_{i_{k+n}} \neq \emptyset$

folgt. Dies bedeutet aber

$$N\left(\bigvee_{k=0}^{n+m-1} T^{-k} a\right) \leq N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} a\right) \cdot N\left(\bigvee_{k=0}^{m-1} T^{-k} a\right),$$

welches gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\overline{H}_{n+m}(a) \leq \overline{H}_n(a) + \overline{H}_m(a) \text{ ist.}$$

Definition 1.1.2:

In analoger Weise zur Definition der Entropie setzen wir

$$\overline{h}(T) := \sup \{ \overline{h}(T, a) \mid a \text{ endliche topologische Zerlegung von } X \}$$

In einer Folge von Lemmata und Sätzen sollen nun einige Eigenschaften von $\overline{h}(T)$ und $\overline{h}(T, a)$ bewiesen werden. Die Analogie von $\overline{h}(T)$ zur topologischen Entropie impliziert eine weitgehende Übereinstimmung der Sätze.

Sind a und b topologische Zerlegungen von X , so sagt man, daß b feiner als a ist, im Zeichen $a \succ b$, wenn das Innere eines jeden Elementes von b in dem Inneren eines Elementes von a enthalten ist. Man beachte, daß diese Definition von der üblichen leicht abweicht.

Lemma 1.1.2:

Seien a und b topologische Zerlegungen und $a \succ b$.

Dann gilt: $\bar{H}(T, a) \leq \bar{H}(T, b)$.

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $\text{In} \bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k} A_{i_k} \neq \emptyset$ ($A_{i_k} \in a$; $0 \leq k \leq n-1$)

Die Menge $X_b := \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k \bigcup_{B \in b} \text{In } B$ liegt nach dem Baire'schen

Satz dicht in X . Daher gibt es $x \in \text{In} \bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k} A_{i_k} \cap X_b$,

und man findet Mengen $B_{j_k} \in b$ mit $T^k(x) \in \text{In } B_{j_k}$ ($0 \leq k \leq n-1$).

Es folgt $\emptyset \neq \bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k} \text{In } B_{j_k} = \text{In} \bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k} B_{j_k} \subset \text{In} \bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k} A_{i_k}$.

Daher gilt auch $N(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} b) \geq N(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} a)$ und

$$\bar{H}_n(b) \geq \bar{H}_n(a).$$

Lemma 1.1.3:

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und sei a eine topologische Zerlegung.

Dann gilt $\bar{H}(T, \bigvee_{k=-m}^n T^{-k} a) = \bar{H}(T, a)$.

Beweis:

Da T homöomorph ist, hat man

$$N\left(\bigvee_{k=-m}^{n+p-1} T^{-k} a\right) = N\left(\bigvee_{k=0}^{n+m+p-1} T^{-k} a\right).$$

Daraus folgt sofort für $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{p} \mathbb{H}_p \left(\bigvee_{k=-m}^n T^{-k} a \right) = \frac{1}{p} \mathbb{H}_{m+n+p}(a) \leq \frac{1}{p} \mathbb{H}_p(a) + \frac{1}{p} \mathbb{H}_{m+n}(a).$$

Läßt man $p \rightarrow \infty$ streben, erhält man die Ungleichung

$$\mathbb{H}(T, \bigvee_{k=-m}^n T^{-k} a) \leq \mathbb{H}(T, a).$$

Aus $\bigvee_{k=-m}^n T^{-k} a \prec a$ und Lemma 1.1.2 folgt die Umkehrung.

Bemerkung: $\bigvee_{k=-m}^n T^{-k} a$ ist natürlich im allgemeinen keine topologische Zerlegung mehr. Indem man jedoch die Mengen in $\bigvee_{k=-m}^n T^{-k} a$, deren Inneres leer ist, auf solche Elemente in $\bigvee_{k=-m}^n T^{-k} a$, deren Inneres nicht leer ist, verteilt, erhält man eine topologische Zerlegung. Sie ist feiner als a , wie aus der Definition von ' $\prec$ ' hervorgeht. Wenn also aus dem Zusammenhang hervorgeht, daß man eine topologische Zerlegung benötigt, soll unter $\bigvee_{k=-m}^n T^{-k} a$ immer eine der soeben erklärten Zerlegungen gemeint sein.

Satz 1.1.1:

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathbb{H}(T^n) = |n| \cdot \mathbb{H}(T)$.

Beweis:

Wir gehen analog zu dem entsprechenden Beweis der Entropietheorie vor. Sei zunächst $n > 0$.

Für jede topologische Zerlegung a gilt

$$\mathbb{H}(T^n) \geq \mathbb{H}(T^n, \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j} a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbb{H}_{kn}(a) = n \mathbb{H}(T, a).$$

$n \cdot \mathbb{H}(T, a) \geq \mathbb{H}(T^n, a)$ ist die triviale Ungleichung.

Wir haben also $n \cdot \bar{H}(T) = \bar{H}(T^n)$ für $n \geq 1$.

Der Fall $n = 0$ ist trivial.

Da T ein Homöomorphismus ist, gilt $N(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^k a) = N(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} a)$

für jede topologische Zerlegung. Daher gilt $\bar{H}(T) = \bar{H}(T^{-1})$,
und mit dem Fall $n > 0$ erhält man

$$\bar{H}(T^{-n}) = n \cdot \bar{H}(T^{-1}) = n \bar{H}(T) \quad (n > 0).$$

Zur Vorbereitung des nächsten Satzes möchte ich erwähnen,
daß mit $d(\cdot, \cdot)$ stets die Metrik auf X bezeichnet werden
soll. $K_\varepsilon(x)$ soll immer die ε -Kugel um den Punkt $x \in X$
sein: $K_\varepsilon(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \}$.

Satz 1.1.2:

Sei $X_0 \subset X$ T -invariante, abgeschlossene Teilmenge in X .
Dann gilt für die vermöge der auf X_0 induzierten Topologie
gebildeten Größe $\bar{H}(T|_{X_0})$:

$$\bar{H}(T|_{X_0}) \leq \bar{H}(T).$$

Beweis:

Sei $a = \{A_1, \dots, A_n\}$ eine endliche topologische Zerlegung
von X_0 . Wir wollen eine topologische Zerlegung a' von X
konstruieren, die $\bar{H}(T|_{X_0}, a) \leq \bar{H}(T, a')$ erfüllt. Wir wollen
noch verabreden, daß wir für in der Relativtopologie
topologisch Inneres ' In_0 ' schreiben wollen.

Zu $x \in \text{In}_0 A_1$ wähle $\varepsilon(x)$ mit $K_{2\varepsilon(x)}(x) \cap \overline{\text{In}_0 A_j} = \emptyset$
für $2 \leq j \leq n$. Sei $y \in \text{In}_0 A_j$ mit $(2 \leq j \leq n)$.

Angenommen, es gilt $y \in B_1 := \overline{\bigcup_{x \in \text{In}_0 A_1} K_{\varepsilon(x)}(x)}$.

Dann gibt es Folgen $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $x_m \in \text{In}_0 A_1$

$z_m \in K_{\varepsilon(x_m)}(x_m)$ und $y = \lim_{m \rightarrow \infty} z_m$. Man kann zugleich

annehmen, daß die Folge (x_m) konvergiert, etwa $x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$

gilt. Es gilt nun

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} (d(x, x_m) + d(x_m, z_m) + d(z_m, y)) \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \varepsilon(x_m). \end{aligned}$$

Nun muß $\liminf_{m \rightarrow \infty} \varepsilon(x_m) = 0$ sein, denn sonst hat man wegen

$$d(z_m, y) \geq \varepsilon(x_m) \quad \liminf_{m \rightarrow \infty} d(z_m, y) > 0.$$

Es folgt also $d(x, y) = 0$, d.h. $x = y$. Dies impliziert

$y \in \overline{\text{In}_0 A_1}$, einen Widerspruch!

Wir gehen nun induktiv vor: Angenommen, man hat schon

$B_1, \dots, B_s$ ($s < n$) mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

- i) $\text{In } B_k \cap X_0 \supseteq \text{In}_0 A_k$ ($1 \leq k \leq s$)
- ii) B_k ist abgeschlossen ($1 \leq k \leq s$)
- iii) $\text{In } B_k \cap \text{In } B_j = \emptyset$ ($1 \leq k \neq j \leq s$)
- iv) $B_k \cap \text{In}_0 A_j = \emptyset$ ($1 \leq k \leq s; j \neq k; 1 \leq j \leq n$).

Zu jedem $x \in \text{In}_0 A_{s+1}$ finden wir dann $\varepsilon(x) > 0$ mit

$$\begin{aligned} K_{2\varepsilon(x)}(x) \cap B_k &= \emptyset & (1 \leq k \leq s) \\ K_{2\varepsilon(x)}(x) \cap \overline{\text{In}_0 A_j} &= \emptyset & (1 \leq j \neq s+1 \leq n). \end{aligned}$$

Sei $B_{s+1} := \overline{\bigcup_{x \in \text{In}_0 A_{s+1}} K_{\varepsilon(x)}(x)}$. Ein vollkommen analoger

Schluß zu dem obigen zeigt, daß iii) und iv) gilt. Die Eigenschaften i) und ii) sind nach Konstruktion erfüllt.

Definiert man nun $A'_1 := B_1$; $A'_s := B_s \setminus \bigcup_{k=1}^{s-1} A'_k$ ($2 \leq s \leq n-1$)

und $A'_n := X \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A'_k$, so ist $a' := \{A'_1, \dots, A'_n\}$ eine topologische Zerlegung, die $\text{In } A'_k \cap X_0 \supseteq \text{In}_0 A_k$ ($1 \leq k \leq n$) erfüllt.

Sei $p \in \mathbb{N}$ beliebig und $\text{In}_0 \bigcap_{j=0}^{p-1} (T|_{X_0})^{-j} A_{k_j} \neq \emptyset$.

Dann gilt auch

$$\begin{aligned} \emptyset \neq \text{In}_0 \bigcap_{j=0}^{p-1} (T|_{X_0})^{-j} A_{k_j} &= \bigcap_{j=0}^{p-1} (T|_{X_0})^{-j} \text{In}_0 A_{k_j} \subseteq \\ &\subseteq \bigcap_{j=0}^{p-1} T^{-j} (\text{In } A'_{k_j} \cap X_0) \subseteq \bigcap_{j=0}^{p-1} T^{-j} \text{In } A'_{k_j} = \text{In} \bigcap_{j=0}^{p-1} T^{-j} A'_{k_j} . \end{aligned}$$

Es folgt $N(\bigcap_{j=0}^{p-1} (T|_{X_0})^{-j} a) \leq N(\bigcap_{j=0}^{p-1} T^{-j} a')$,

$$\overline{H}_p(a) \leq \overline{H}_p(a') \text{ und } \overline{H}(T|_{X_0}, a) \leq \overline{H}(T, a') \leq \overline{H}(T) .$$

Da a beliebig war, erhalten wir $\overline{H}(T|_{X_0}) \leq \overline{H}(T)$.

Satz 1.1.3:

Sei (Y, S) ein weiteres dynamisches System, d.i. Y kompakt, metrisch und $S : Y \longrightarrow Y$ ein Homöomorphismus. Sei ferner $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung, die mit S und T kommutiert, d. h. $f \circ T = S \circ f$ erfüllt.

Dann gilt:

- a) Ist f surjektiv, so folgt $\overline{H}(T) \geq \overline{H}(S)$
- b) Ist f bijektiv, so folgt $\overline{H}(T) = \overline{H}(S)$
- c) Ist f injektiv, so folgt $\overline{H}(T) \leq \overline{H}(S)$.

Beweis:

a) Sei $a = \{A_1, \dots, A_n\}$ eine endliche topologische Zerlegung von Y . Wir definieren

$$B_k := f^{-1} \text{In } A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

$$B_n := X \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j .$$

Dann ist $b := \{B_1, \dots, B_n\}$ eine topologische Zerlegung von X , weil f eine stetige Abbildung ist. Ist nun

$$\text{In } \bigcap_{j=0}^{p-1} S^{-j} A_{k_j} \neq \emptyset ,$$

so folgt sofort, daß

$$\begin{aligned} f^{-1} \text{In } \bigcap_{j=0}^{p-1} S^{-j} A_{k_j} &= \bigcap_{j=0}^{p-1} f^{-1} S^{-j} \text{In } A_{k_j} \\ &= \bigcap_{j=0}^{p-1} T^{-j} f^{-1} \text{In } A_{k_j} \neq \emptyset \end{aligned}$$

und offen ist. Das heißt aber

$$\text{In } \bigcap_{j=0}^{p-1} T^{-j} B_{k_j} \neq \emptyset .$$

Es folgt wiederum

$$N(\bigcap_{j=0}^{p-1} S^{-j} a) \leq N(\bigcap_{j=0}^{p-1} T^{-j} b), \quad \overline{H}_p(a) \leq \overline{H}_p(b) \text{ und}$$

$$\overline{H}(S, a) \leq \overline{H}(T, b) \leq \overline{H}(T) .$$

Da a beliebig war, gilt also $\overline{H}(S) \leq \overline{H}(T)$.

b) Aus a) folgt sofort, da f^{-1} stetig ist:

$$\overline{H}(S) \leq \overline{H}(T) \text{ und } \overline{H}(S) \geq \overline{H}(T) .$$

c) Da f stetig ist, ist $f(X)$ abgeschlossene Teilmenge in Y .

Wegen $S \cdot f(X) = f \cdot T(X) = f(X)$ ist $f(X)$ S -invariant. Nun

ist $f : X \rightarrow f(X)$ bijektiv und man erhält unter Benutzung

des Satzes 1.1.2: $\overline{H}(T) = \overline{H}(S|_{f(X)}) \leq \overline{H}(S)$.

Die Aussage des eben bewiesenen Satzes 1.1.3 kann man noch in einer Richtung verschärfen. In dieser Form können wir ihn in § 2 anwenden.

Satz 1.1.4:

Sei (Y, S) ein dynamisches System wie in Satz 1.1.3. Sei $X_0 \subset X$ ein T -invariante, dichte Teilmenge in X und $f : X_0 \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung, die mit T und S kommutiert. Dann gilt:

- a) Ist f injektiv und $f^{-1}|_{f(X_0)}$ stetig, so gilt $\overline{h}(T) \leq \overline{h}(S)$
- b) Ist $f(X_0)$ dicht in Y , so gilt $\overline{h}(T) \geq \overline{h}(S)$.

Beweis:

a) Sei $a = \{A_1, \dots, A_n\}$ eine topologische Zerlegung von X .

Wir wollen eine topologische Zerlegung $b = \{B_1, \dots, B_n\}$ von $Y_0 := \overline{f(X_0)}$ konstruieren, die $\overline{h}(T, a) \leq \overline{h}(S|_{Y_0}, b)$

erfüllt. Sei zunächst $C_j := \overline{f(\text{In } A_j \cap X_0)}$ ($1 \leq j \leq n$).

Wir zeigen zunächst: $f(\text{In } A_j \cap X_0) \subseteq \text{In}_0 C_j$ ($1 \leq j \leq n$).

Angenommen, dies ist nicht richtig. Dann gibt es ein

$x \in \text{In } A_j \cap X_0$ mit $f(x) \notin \text{In}_0 C_j$. Da nun $f(x)$ ein Randpunkt von C_j ist und $f(X_0)$ dicht in Y_0 liegt, gibt es eine Folge $f(x_n) \in C_j \cap f(X_0)$ mit $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

('C' bedeute hier die Komplementbildung in Y_0). Da auch

f^{-1} stetig vorausgesetzt ist, gilt $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Aus

$x_n \notin \text{In } A_j$ folgt, daß $x \notin \text{In } A_j$ gelten muß. Widerspruch!

Da f injektiv ist, folgt sofort $\text{In}_0 C_j \cap \text{In}_0 C_k = \emptyset$ für

$1 \leq j \neq k \leq n$. Wie im letzten Satz gezeigt, findet man

eine topologische Zerlegung $b = \{B_1, \dots, B_n\}$ von Y_0 ,

die $\text{In}_0 C_j = \text{In}_0 B_j$ für $1 \leq j \leq n$ erfüllt.

Sei nun $\text{In} \bigcap_{k=0}^{p-1} S^{-k} A_{i_k} \neq \emptyset$. Dann gilt es $x \in X_0 \cap \text{In} \bigcap_{k=0}^{p-1} S^{-k} A_{i_k}$.

und es folgt $f(x) \in \text{In}_0 \bigcap_{k=0}^{p-1} S^{-k} C_{i_k}$, d.h.

$$\overline{E(T, a)} \subset \overline{E(S|_{Y_0}, b)} \subset \overline{E(S|_{Y_0})}.$$

Die Anwendung von Satz 1.1.2 liefert $\overline{E(T, a)} \subset \overline{E(S)}$.

a war beliebig gewählt. Daher $\overline{E(T)} \subset \overline{E(S)}$.

2) Sei $a = \{A_1, \dots, A_n\}$ eine topologische Zerlegung von Y .

Wir definieren $C_j := f^{-1}(\text{In } A_j \cap Y_0)$ ($1 \leq j \leq n$; $Y_0 := f(X_0)$)

und wollen wiederum $f^{-1}(\text{In } A_j \cap Y_0) \subset \text{In } C_j$ zeigen.

Angenommen, es existiert $x \in C_j \setminus \text{In } C_j$, $x \in X_0$ mit

$$f(x) \in \text{In } A_j \cap Y_0.$$

Man findet eine Folge $x_n \in (X \setminus C_j) \cap X_0$ ($n \in \mathbb{N}$), für

die $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ gilt (X_0 liegt dicht in X). Für

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ folgt aus $f(x_n) \in \text{In } A_j$

$$U \cap \text{In } A_j \neq \emptyset$$

für jede offene Umgebung U von $f(x)$. Daher kann nicht

$f(x) \in \text{In } A_j$ gelten. Widerspruch!

Wir definieren nun die topologische Zerlegung $b = \{B_1, \dots, B_n\}$

durch $B_j := C_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i$, $B_n := X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$ ($1 \leq j \leq n-1$).

Sei nun $a \in B$ beliebig und

$$\text{In} \bigcap_{k=0}^{p-1} S^{-k} A_{i_k} \neq \emptyset.$$

Dann gibt es ein $y \in \bigcap_{k=0}^{p-1} S^{-k} A_{1_k} \cap f(X_0)$, und es folgt

$$T^k f^{-1}(y) = f^{-1} S^k(y) \subset f^{-1}(\bigcap_{k=0}^{p-1} A_{1_k} \cap Y_0)$$

$$\subset \bigcap_{k=0}^{p-1} C_{1_k} \subset \bigcap_{k=0}^{p-1} B_{1_k} . \quad (0 \leq k \leq p-1)$$

Also folgt auch

$$\bigcap_{k=0}^{p-1} T^{-k} B_{1_k} \neq \emptyset .$$

Das impliziert sofort

$$N\left(\bigcap_{k=0}^{p-1} T^{-k} b\right) \geq N\left(\bigcap_{k=0}^{p-1} S^{-k} a\right) .$$

Für $p \rightarrow \infty$ zieht dies

$$\bar{h}(S, a) \leq \bar{h}(T, b) \leq \bar{h}(T)$$

nach sich. a war beliebig, also $\bar{h}(S) \leq \bar{h}(T)$.

Ich möchte abschließend noch auf den Zusammenhang zur topologischen Entropie eingehen. In [1] definierten Adler, Konheim und McAndrew den Begriff der topologischen Entropie $h(T)$ für das kompakte dynamische System (X, T) folgendermaßen:

Sei a eine offene Überdeckung von X und $M(a)$ die minimale Mächtigkeit einer endlichen Teilüberdeckung von a . Man definiert $h(T, a) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log M\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} T^{-k} a\right)$. Dann ist

$$h(T) := \sup\{h(T, a) \mid a \text{ offene Überdeckung von } X\}.$$

In einigen Fällen erwies sich diese Definition als zu schwerfällig zu handhaben, wie z.B. beim Beweis des Produktsatzes (vgl. [5], [6], [11]).

Deshalb gab R. Bowen in [5] (vgl. auch [3]) eine äquivalente Definition der topologischen Entropie für kompaktes, metrisches X :

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Eine Menge E in X heißt

- a) (n, ε) -spannend, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $y \in E$ mit $d(T^j(x), T^j(y)) < \varepsilon$ für alle $j = 0, \dots, n-1$ gibt.
 b) (n, ε) -trennend, wenn es zu je zwei verschiedenen $x, y \in E$ ein $j \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $d(T^j(x), T^j(y)) > \varepsilon$ gibt.

Sei $T_n(\varepsilon)$ die maximale Mächtigkeit einer (n, ε) -trennenden Menge, $S_n(\varepsilon)$ die minimale Mächtigkeit einer (n, ε) -spannenden Menge, $T(\varepsilon) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log T_n(\varepsilon)$ und

$S(\varepsilon) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log S_n(\varepsilon)$. Mit diesen Bezeichnungen

gilt $h(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(\varepsilon)$.

Abschließend sei an dieser Stelle erwähnt, daß eine Verallgemeinerung dieser Definition auf beliebige kompakte Räume von mir stammt ([6]). Es sei auch auf den engen Zusammenhang dieser Definition zur Definition der ε -Kapazität $H_n(\varepsilon)$ von Kolmogoroff und Tihomirov ([15]) hingewiesen:

Dinaburg ([7]) zeigte z.B. für Teilshifts

$$h(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot H_n(\varepsilon) .$$

Die Beziehung der topologischen Entropie zur Größe $\bar{h}(T)$ regelt nun der folgende Satz:

Satz 1.1.5:

Es gilt stets $h(T) \leq \bar{h}(T)$.

Beweis:

Zu beliebigem $\delta > 0$ wählen wir $\varepsilon > 0$ mit

$$T(\varepsilon) \geq h(T) - \delta.$$

Da X kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_s \in X$ (mit minimalem $s \in \mathbb{N}$) derart, daß
$$X = \bigcup_{i=1}^s \overline{K_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)}$$
 gilt.

Sei $A'_j := K_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j) \setminus \bigcup_{i < j} \overline{K_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)}$ ($1 \leq j \leq s$).

Es gilt nun:

A'_j ist offen und nicht leer für jedes $1 \leq j \leq s$ und $X = \bigcup_{j=1}^s \overline{A'_j}$.

Wir finden deshalb eine Zerlegung $a = \{A_1, \dots, A_s\}$ von X , die in $A_j = A'_j$ und $A_j \subset \overline{K_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)}$ für $1 \leq j \leq s$ erfüllt.

Dann ist a eine topologische Zerlegung, und wir werden $T(\varepsilon) \leq \bar{h}(T, a)$ zeigen.

Sei E eine maximale (n, ε) -trennende Menge ($n \in \mathbb{N}$ beliebig).

Wir können annehmen, daß E in der nach dem Satz von Baire dichten Teilmenge $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} T^m \bigcup_{j=1}^s \text{In } A_j$ liegt. Seien x und y zwei verschiedene Punkte aus E und angenommen, es gilt

$$x, y \in \bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k} A_{i_k}.$$

Das würde jedoch sofort

$$T^k(x), T^k(y) \in \overline{K_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{i_k})}$$

für alle $k = 0, \dots, n-1$ nach sich ziehen. Widerspruch!

Die verschiedenen Punkte in E liegen also in verschiedenen Elementen von $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} a$. Die Bedingung $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} T^m \bigcup_{i=1}^s \text{In } A_i$ für $x \in E$ garantiert, daß x in einem Element von $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} a$ liegt, das nicht leeres Inneres besitzt.

Daraus folgt nun jedoch, daß

$$T_n(\varepsilon) \leq N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}a \right) \text{ gelten muß.}$$

Das zieht wiederum

$$T(\varepsilon) \leq \overline{h}(T, a) \leq \overline{h}(T)$$

nach sich. Man erhält also

$$h(T) - \delta \leq \overline{h}(T)$$

Für $\delta \rightarrow 0$ folgt dann die Behauptung.

Man kann die Aussage des Satzes 1.1.5 noch verschärfen. Wir wollen mit $d(A) := \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ den Durchmesser der Menge $A \subset X$ bezeichnen.

Definition 1.1.3:

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlicher topologischer Zerlegungen von X heiße eine verfeinernde Folge, wenn

- 1) $a_n \succ a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup \{d(A_n) \mid A_n \in a_n\}) = 0$

gilt.

Das folgende Corollar ist eine Konsequenz des Beweises von Satz 1.1.5. Man muß den dort geführten Beweis leicht abändern.

Corollar 1.1.5:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge endlicher topologischer Zerlegungen von X , für die $\inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup \{d(A) \mid A \in a_n\}) = 0$ gilt.

Dann folgt

$$h(T) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{h}(T, a_n).$$

Ist zudem (a_n) eine verfeinernde Folge, so gilt

$$h(T) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{h}(T, a_n).$$

Ein Satz von Goodwyn ([9]) besagt, daß für jedes T-invariante, normierte Borelmaß m auf X $h_m(T) \leq h(T)$ gilt.

$h_m(T)$ bezeichne hier die maßtheoretische Entropie. Für eine Definition dieser Größe verweise ich auf die einschlägige Literatur: [2], [12], [16], [18].

Einen analogen Satz nun zu beweisen, ist sehr einfach:

Satz 1.1.6:

Sei m ein T-invariantes, normiertes Borelmaß auf X .

Für die Entropie von m gilt dann

$$h_m(T) \leq \bar{h}(T).$$

Beweis:

Es ist bekannt, daß es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ m -randloser, topologischer Zerlegungen gibt, die die σ -Algebra erzeugen. (vgl. Rohlin[18]; Jacobs [12], [11])

Da für $A \in a_n$ $m(A \setminus \text{In } A) = 0$ gilt, folgt für jedes $p \in \mathbb{N}$:

$$|\{A \in \bigvee_{k=0}^{p-1} T^{-k} a_n \mid m(A) > 0\}| \leq N(\bigvee_{k=0}^{p-1} T^{-k} a_n).$$

Aus einer bekannten Eigenschaft der Entropiefunktion (vgl. [18]) folgt dann sofort

$$H_m \left(\bigvee_{k=0}^{p-1} T^{-k} a_n \right) \leq \log N \left(\bigvee_{k=0}^{p-1} T^{-k} a_n \right)$$

und

$$h_m(T, a_n) \leq \bar{h}(T, a_n) .$$

Nach einem Satz von Roklin [18] gilt

$$h_m(T) = \sup_{n \in \mathbb{N}} h_m(T, a_n) .$$

Damit erhalten wir sofort die gewünschte Beziehung

$$h_m(T) \leq \bar{h}(T) .$$

Man würde an dieser Stelle gerne die Ungleichung

$$\bar{h}(T) \leq h(T)$$

beweisen, um den oben angesprochenen Satz von Goodwyn zu erhalten. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist jedoch noch nicht bekannt. Auf jeden Fall würde meiner Meinung nach ein Beweis sehr kompliziert werden. Der Goodwyn'sche Satz läßt sich jedoch mit speziellen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beweisen (vgl. [9]). Zu einem späteren Zeitpunkt komme ich darauf noch zurück.

§ 2 Eine Einbettung dynamischer Systeme in Teilshifts

Befassen wir uns zunächst mit dem Begriff 'Teilshift'. Wir wollen mit $\mathbb{Z}_+$ die Menge der ganzen Zahlen ≥ 0 bezeichnen. Auf dem Produktraum $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ führen wir die folgende Metrik $|\cdot, \cdot|$ ein:

Sei $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $\eta = (\eta_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$.

Wir definieren

$$|\omega, \eta| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(\omega_k, \eta_k)}{2^{|k|}}$$

$$\text{mit } \delta(\omega_k, \eta_k) = \begin{cases} \left| \frac{1}{\omega_k} - \frac{1}{\eta_k} \right| & \text{für } \omega_k, \eta_k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\omega_k} & \text{für } \omega_k \in \mathbb{N} ; \eta_k = 0 \\ \frac{1}{\eta_k} & \text{für } \eta_k \in \mathbb{N} ; \omega_k = 0 \\ 0 & \text{für } \omega_k = \eta_k = 0 \end{cases}$$

für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

Die Menge $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ zusammen mit der von der Metrik $|\cdot, \cdot|$ erzeugten Topologie wollen wir im folgenden stets als Shiftraum (mit unendlichem Alphabet) ansprechen. Nun ist δ eine Metrik auf $\mathbb{Z}_+$, und die von δ erzeugte Topologie macht $\mathbb{Z}_+$ zu einem kompakten Raum. Der Satz von Tychonoff (vgl. Kelley [13]) macht $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ zu einem kompakten Raum in der Produkttopologie, die gleichzeitig von der angegebenen Metrik $|\cdot, \cdot|$ erzeugt wird.

Mit Zylindermengen wollen wir die Mengen der Form

$$[c_0, \dots, c_s]_m := \{(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}} \mid \omega_m = c_0, \dots, \omega_{m+s} = c_s\}$$

für $c_0, \dots, c_s \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{Z}_+$ bezeichnen. Dann sind alle Zylindermengen offen und abgeschlossen.

Auf $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ gibt es einen kanonischen Homöomorphismus, den sogenannten Shift S , der durch

$$S((\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (\eta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$$

$$\eta_j = \omega_{j-1}$$

für $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $\eta = (\eta_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ definiert ist.

Man beachte, daß hier nur der rechtsseitige Shift erklärt wird; wir werden nicht mehr benötigen. Man sieht sofort, daß S homöomorph ist.

Nach diesen Vorbereitungen machen wir die

Definition 1.2.1:

Eine shiftinvariante Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ heißt ein Teilshift. Ist Ω zudem abgeschlossen, so sprechen wir von einem abgeschlossenen Teilshift. Einen abgeschlossenen Teilshift Ω zusammen mit der Restriktion des Shiftes auf Ω nennen wir ein symbolisches dynamisches System.

Die Notation eines Shiftraumes mit endlichem Alphabet ordnet sich hier ein, wenn man von einer anderen, aber äquivalenten Metrik absieht: Für $n \in \mathbb{N}$ ist üblicherweise $\Omega = \{(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}} \mid 1 \leq \omega_k \leq n\}$ der Shiftraum über dem Alphabet $\{1, \dots, n\}$. Laut Definition 1.2.1 ist er natürlich ein abgeschlossener Teilshift.

Wir wollen nun noch vereinbaren, daß wir für die Restriktion des Shiftes S auf einen Teilshift Ω wieder S schreiben, falls es keine Verwechslung geben kann. Ebenso soll für $[c_0, \dots, c_s]_m \cap \Omega$ ($c_0, \dots, c_s \in \mathbb{N}$) wieder $[c_0, \dots, c_s]_m$ geschrieben werden, solange dies eindeutig aus dem Zusammenhang hervorgeht.

Wenden wir uns nun dem Problem zu, das in diesem Paragraphen behandelt werden soll: Zu einer noch näher zu bestimmenden Teilmenge $X_0 \subset X$ unseres dynamischen Systems (X, T) wollen wir einen Teilshift Ω derart bestimmen, daß ein Homöomorphismus $f : X_0 \longrightarrow \Omega$ existiert, der mit T und dem Shift S auf Ω kommutiert: $f \circ T = S \circ f$. Anschließend soll f^{-1} auf den Abschluß $\overline{\Omega}$ bzw. auf $\overline{\Omega} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ erweitert werden. Beginnen wir mit

Definition 1.2.2:

Sei $X_0 \subset X$ Teilmenge in X , und a eine topologische Zerlegung von X .

a) Wir schreiben $\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} T^{-k}a \underset{X_0}{=} \varepsilon$ und sagen 'a sei

trennend für X_0 ', wenn für alle $x \in X_0$ und für $A_{i_k} \in a$

$$(k \in \mathbb{Z}) \text{ mit } x \in \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} T^{-k}A_{i_k}$$

$$\{x\} = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} T^{-k}A_{i_k} \text{ folgt.}$$

b) Wir schreiben $\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} T^{-k}a \underset{X_0}{=} \varepsilon$ und sagen 'a sei

a-trennend für X_0 ', wenn für alle $x \in X_0$ und alle $A_{i_k} \in a$

$$(k \in \mathbb{Z}) \text{ mit } x \in \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} T^{-k}\overline{A_{i_k}}$$

$$\{x\} = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} T^{-k}\overline{A_{i_k}} \text{ folgt.}$$

Ist a eine topologische Zerlegung von X , so sei X_a stets die Menge $\bigcap_{k=-\infty}^{\infty} T^k \bigcup_{A \in a} A$. X_a ist nach dem Satz von Baire

eine dichte Menge. Einfach zu beweisen, ist das folgende

Lemma 1.2.1:

Sei $a = \{A_1, A_2, \dots\}$ eine topologische Zerlegung von X , die trennend für die Menge $X_0 \subset X$ ist. Dann existiert eine stetige, injektive Abbildung

$$f : \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(X_0 \cap X_a) \longrightarrow \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}},$$

die mit dem Shift S kommutiert: $f \circ T = S \circ f$.

Bemerkung: $X_0 \cap X_a$ kann natürlich leer sein. Dann wird die Aussage trivial.

Beweis:

Zu jedem $x \in X$ findet man Mengen $A_{i_k} \in a$ ($k \in \mathbb{Z}$) mit

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k A_{i_k}.$$

Die Mengen A_{i_k} sind eindeutig bestimmt, weil a eine Zerlegung ist. Wir wollen uns bei der Definition von f jedoch nur auf die Menge $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(X_0 \cap X_a)$ beschränken:

Für $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(X_0 \cap X_a)$ sei

$$f(x) := (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

gesetzt, wenn

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k A_{\omega_k}$$

gilt.

Wir zeigen zunächst, daß f injektiv ist. Angenommen, es gelte für $x, y \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(X_0 \cap X_a)$ $f(x) = f(y) = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Zuerst einmal existiert ein $j \in \mathbb{Z}$ mit $T^j(x) \in X_0$.

Dann hat man $T^j(x), T^j(y) \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^{k+j} A_{\omega_k}$. Dies ist

nach Voraussetzung jedoch nur dann richtig, wenn

$T^j(x) = T^j(y)$ gilt. T ist aber bijektiv, also folgt

$x = y$.

Die Stetigkeit von f sieht man so ein: Sei $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(X_0 \cap X_a)$

und U eine offene Umgebung von $f(x)$. Da $f(x) \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$

richtig ist und die Zylindermengen eine Umgebungsbasis

für die Punkte in $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ bilden, gibt es eine Zylindermenge

$[c_0, \dots, c_s]_m \subset U$, die auch $f(x)$ enthält. Gemäß Definition von f gilt dann

$$\begin{aligned} & \{y \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(X_0 \cap X_a) \mid f(y) \in [c_0, \dots, c_s]_m\} \\ &= \bigcap_{k=m}^{m+s} T^k A_{c_{k-m}} \cap \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} T^j(X_0 \cap X_a) = \bigcap_{k=m}^{m+s} T^k \text{In} A_{c_{k-m}} \cap \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} T^j(X_0 \cap X_a). \end{aligned}$$

Diese letzte Menge ist offen in $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} T^j(X_0 \cap X_a)$ und deshalb ist f stetig. Schließlich zeigen wir noch $f \circ T = S \circ f$.

Sei $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(X_0 \cap X_a)$ und $f(x) = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}}$. Aus $\{x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k A_{\omega_k}$

folgt $\{T(x)\} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k A_{\omega_{k-1}}$. Das impliziert $f(T(x)) = S(f(x))$.

In diesem Lemma muß f^{-1} nicht notwendigerweise stetig sein. Das liegt daran, daß die Mengen der Form

$$\bigcap_{k=n}^m T^k \text{In} A_{i_k} \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$

im allgemeinen keine Umgebungsbasis für die Punkte in

$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(X_0 \cap X_a)$ bilden. Dies wird im folgenden Satz erzwungen.

Satz 1.2.1:

Sei a und X_0 wie in Lemma 1.2.1. Wir machen die zusätzliche Voraussetzung, daß a a -trennend für X_0 ist. Dann ist die in Lemma 1.2.1 konstruierte Abbildung f ein Homöomorphismus auf ihr Bild.

Beweis:

Wir müssen die Stetigkeit von f^{-1} zeigen. Sei x aus dem Definitionsbereich von f . Es seien $A_{i_k} \in a$ die eindeutig bestimmten Mengen mit $\{x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k A_{i_k}$. Man muß an dieser Stelle beachten, daß dies $\{x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k \text{In } A_{i_k}$ nach sich zieht. Es soll nun gezeigt werden, daß das Mengensystem $\{\bigcap_{k=-n}^n T^k \text{In } A_{i_k} \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis für x ist.

Sei V beliebige, offene Umgebung von x . Da a a -trennend für X_0 - und damit auch für $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(X_0 \cap X_a)$ - ist, folgt

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k \overline{A_{i_k}} = \emptyset.$$

Die endliche Durchschnittseigenschaft des kompakten Raumes X garantiert die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\bigcap_{k=-n}^n T^k \overline{A_{i_k}} = \emptyset.$$

Das heißt aber

$$\bigcup_{k=-n}^n T^k \text{In } A_{i_k} \subset \bigcup_{k=-n}^n T^k \overline{A_{i_k}} \subset V.$$

Die Stetigkeit von f^{-1} folgt jetzt sofort aus der Tatsache, daß $f(\bigcup_{k=-n}^n T^k \text{In } A_{i_k}) = [i_{-n}, \dots, i_n]_{-n}$ gilt.

Es soll jetzt das Problem der Fortsetzung von f^{-1} angegangen werden. Das Argument das verwendet wird, ist ein allgemein topologisches (vgl. Kelley [13] z.B.).

Auch haben Keynes, Robertson[14] und Reddy[17] in dieser Richtung gearbeitet.

Satz 1.2.2:

Die topologische Zerlegung α sei α -trennend für X .
Dann gibt es einen abgeschlossenen Teilshift $\Omega \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_+}$
und eine stetige Abbildung

$$g : \Omega \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow X$$

mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $T \circ g = g \circ S$
- 2) Für die vermöge Satz 1.2.1 gewonnene Abbildung

$$f : X_{\alpha} \longrightarrow \Omega$$

$$\text{gilt} \quad g|_{f(X_{\alpha})} = f^{-1}.$$

- 3) Für $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \cap \Omega$ gilt $\{g((\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}})\} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k \text{In } A_{\omega_k}.$

Beweis:

Wir benutzen zuerst Satz 12.1, um einen Homöomorphismus

$$f : X_a \longrightarrow \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$$

zu gewinnen. Sei $\Omega = \overline{f(X_a)}$ und $\Omega' = \Omega \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$. Wir wollen zunächst g auf Ω' erklären. Es gilt $f(X_a) \subset \Omega'$. Für $\omega \in f(X_a)$ definieren wir

$$g(\omega) := f^{-1}(\omega) .$$

Zu beliebigem $\omega \in \Omega'$ gibt es eine Folge $(\omega^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $f(X_a)$, die gegen ω konvergiert. Wir zeigen nun, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\omega^n)$ existiert und werden dann $g(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} g(\omega^n)$ setzen.

Die Konvergenz in $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ heißt nichts anderes als:

Für alle $l \in \mathbb{N}$ gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ mit

$$\omega_j^n = \omega_j \quad \text{für alle } -l \leq j \leq l; n \geq p .$$

Daraus folgt

$$\bigcap_{j=-l}^l T^j \overline{\text{In } A_{\omega_j}} = \bigcap_{j=-l}^l T^j \overline{\text{In } A_{\omega_j^p}} \neq \emptyset \quad (g(\omega^p) \in \bigcap_{j=-l}^l T^j \overline{\text{In } A_{\omega_j^p}}).$$

Da X kompakt ist, kann man daraus $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} T^j \overline{\text{In } A_{\omega_j}} \neq \emptyset$

schließen. Da diese Menge nach Voraussetzung einpunktig ist - etwa das Element x enthält - setzen wir $x := g(\omega)$. Man beachte hierbei, daß es bei der Bestimmung von x auf die Wahl der Folge $(\omega^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht ankommt. Daher ist g eindeutig bestimmt.

Die Stetigkeit von g sieht man schnell so ein:

Sei $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Omega'$ beliebig und $x = g(\omega)$. Analog wie im Beweis von Satz 1.2.1 zeigt man für eine offene Umgebung V von x die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\bigcap_{j=-n}^n T^j \overline{A_{\omega_j}} \subset V.$$

Aus $g([\omega_{-n}, \dots, \omega_n]_{-n}) \subset \bigcap_{j=-n}^n T^j \overline{A_{\omega_j}} \subset V$ folgt die

Stetigkeit.

Die Eigenschaften 1) - 3) sind trivialerweise erfüllt.

Bemerkung: Man kann die Voraussetzung, daß a a -trennend ist, durch andere Bedingungen ersetzen, die den gleichen Schluß zulassen. Eine solche wäre z.B. folgende:

Für jede Wahl von Elementen $A_{i_k} \in a$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\bigcap_{k=-n}^n T^k A_{i_k}\right) = 0.$$

Ich möchte nun noch eine Bedingung angeben, unter der man f^{-1} auf ganz Ω fortsetzen kann.

Corollar 1.2.2:

Sei $a = \{A_1, A_2, \dots\}$ eine topologische Zerlegung, für die $\lim_{m \rightarrow \infty} d\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right) = 0$ gilt. Dann kann man die

Abbildung g des Satzes 1.2.2 so auf Ω fortsetzen, daß g stetig und surjektiv wird. Ferner existiert ein Punkt $x_0 \in X$ derart, daß für $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Omega$ mit $\omega_0 = 0$

$$g(\omega) = x_0$$

gilt.

Beweis:

Man hat schon aus Satz 1.2.2 $g : \Omega' \rightarrow X$.

Sei $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Omega \setminus \Omega'$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß

$\omega_0 = 0$ gilt. Sei $(\omega^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Ω' , die gegen ω konvergiert.

Das System $\{F_n := \bigcup_{m \geq n} A_m\}$ ist ein absteigend gefiltertes

Mengensystem von abgeschlossenen nicht leeren Mengen F_n ,

besitzt also einen nicht leeren Durchschnitt. Aus der

Voraussetzung $\lim_{n \rightarrow \infty} d(F_n) = 0$ folgt, daß $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ ein-

punktig sein muß. Sei dieser Punkt mit x_0 bezeichnet.

Wir zeigen nun $x_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} g(\omega^p)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und

$n \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $d(F_n) < \varepsilon$ gilt. Die Konvergenz der

Folge $(\omega^p)_{p \in \mathbb{N}}$ garantiert die Existenz eines $p_0 \in \mathbb{N}$ mit

$\omega_0^p \geq n$ für alle $p \geq p_0$. Dann gilt aber $g(\omega^p) \in \overline{A_{\omega_0^p}} \subset F_n$.

Dies hat

$$d(x_0, g(\omega^p)) < \varepsilon \quad (\text{für alle } p \geq p_0)$$

zur Folge.

Wir definieren $g(\omega) := x_0$. Für $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$ und $\omega_k = 0$

setzt man $g(\omega) := T^k(x_0)$.

Die Stetigkeit von g folgt nun ebenso wie im Beweis des

Satzes 1.2.2. g ist auf ganz Ω definiert und, da stetige

Bilder kompakter Mengen kompakt sind, ist g surjektiv.

Bemerkung: Aus dem Beweis dieses Corollares geht her-

vor, daß $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$ genau ein Komponente gleich Null hat,

vorausgesetzt, daß x_0 aperiodisch ist. Falls x_0 periodisch

mit Periode q ist, besteht $\Omega \setminus \Omega'$ aus Punkten $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

deren Komponenten folgende Bedingung erfüllt: Ist $\omega_j = 0$,

so folgt $\omega_{j+iq} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Man kann noch mehr sagen:

Ist $T^i x_0 \in A_{k_i}$ für $1 \leq i \leq q-1$ und $A_{k_1} \in \mathfrak{a}$, so besteht

$\Omega \setminus \Omega'$ aus der Bahn eines periodischen Punktes mit Periode q .
Wie kann man das bis jetzt bewiesene anwenden? Wir wollen eine einfache Situation betrachten. Das dynamische System (X, T) heißt *expandierend*, wenn es eine Konstante $c > 0$ derart gibt, daß für je zwei verschiedene x und y in X ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $d(T^k(x), T^k(y)) > c$ existiert. Man gebe sich nun eine topologische Zerlegung $a = \{A_1, \dots, A_s\}$ des expandierenden Systems (X, T) vor, die

$$d(A_k) \leq c \quad (1 \leq k \leq s)$$

erfüllt. Eine solche existiert aus Kompaktheitsgründen immer. Es ist dann klar, daß a a -trennend für X ist. Wendet man Satz 1.2.2 an, so erhält man einen abgeschlossenen Teilshift $\Omega \subset \{1, \dots, s\}^{\mathbb{Z}}$ und eine stetige, surjektive Abbildung $g : \Omega \longrightarrow X$ (a ist endlich!)

Diese Methode hat in der Literatur schon mehrfach Anwendung gefunden: Ich nenne hier Keynes, Robertson [14] und Reddy [17] als Beispiel. Es seien hier auch die Arbeit von Bowen [4] und die von Sinai [19] erwähnt.

Abschließend möchte ich noch eine Reihe von Beziehungen der dynamischen Systeme (X, T) und (Ω, S) , die in der Relation des Satzes 1.2.2 stehen mögen, aufzählen.

Die erste betrifft die topologische Entropie des Systems (Ω, S) . Zur Vorbereitung beweise ich

Lemma 1.2.2:

Sei $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$ ein abgeschlossener Teilshift, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \{[k]_0 \mid 1 \leq k \leq n\} \cup \{\overline{\bigcup_{k>n} [k]_0}\}$.

Dann gilt für die topologische Entropie von S

$$h(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(S, a_n) .$$

Beweis:

Sei $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Wir wählen $m(k) \in \mathbb{N}$ und $n(k) \in \mathbb{N}$ mit

$$d(A) < \varepsilon_k \quad \text{für alle } A \in \bigvee_{j=-m(k)}^{m(k)} S^{-j} a_{n(k)} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Die Folgen $(m(k))_{k \in \mathbb{N}}$ und $(n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ können als monoton wachsend angenommen werden. Die Folge $(\bigvee_{j=-m(k)}^{m(k)} S^{-j} a_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$

ist dann im Sinne der Arbeit von Adler, Konheim und McAndrew [1] verfeinernd: $\bigvee_{j=-m(k+1)}^{m(k+1)} S^{-j} a_{n(k+1)}$ ist feiner als $\bigvee_{j=-m(k)}^{m(k)} S^{-j} a_{n(k)}$ und der Durchmesser der Mengen in

diesen Überdeckungen strebt gegen Null.

Ein Satz von Adler, Konheim und McAndrew [1] besagt, daß hieraus

$$h(S) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(S, \bigvee_{j=-m(k)}^{m(k)} S^{-j} a_{n(k)})$$

folgt. Ein weiteres Lemma in [1] sichert

$$h(S, \bigvee_{j=-m(k)}^{m(k)} S^{-j} a_{n(k)}) = h(S, a_{n(k)}) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Da nun $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Überdeckungen mit $a_n \supset a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist, folgt die Behauptung

$$h(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(S, a_n) \quad (\text{vgl. [1]}) .$$

Satz 1.2.3:

Sei $a = \{A_1, A_2, \dots\}$ eine für X a -trennende, topologische Zerlegung von X , und (Q, S) das in Satz 1.2.2 konstruierte

symbolische dynamische System zu a . Sei ferner

$a_n := \{A_1, \dots, A_n\} \cup \{\bigcup_{i=1}^n A_i\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

für die topologische Entropie von (Ω, S) :

$$h(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{h}(T, a_n) .$$

Beweis:

Wir bemerken zunächst, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{h}(T, a_n)$ existiert (Corollar 1.1.5 und Lemma 1.1.3).

Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die in Lemma 1.2.2 erklärte Folge offener Überdeckungen von Ω . Wir werden $h(S, b_n) = \bar{h}(T, a_n)$ zeigen.

Sei deshalb $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Ist $m \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{j=0}^{m-1} S^{-j} B_{i_j} \neq \emptyset$ ($B_{i_j} \in b_n$; $0 \leq j \leq m-1$),

so existiert $\omega \in \bigcap_{j=0}^{m-1} S^{-j} B_{i_j} \cap f(X_a)$ (f wie in Satz 1.2.2).

Daraus folgt sofort, daß

$$g(\omega) \in g\left(\bigcap_{j=0}^{m-1} S^{-j} B_{i_j}\right) \cap X_a \quad (g \text{ wie in Satz 1.2.2})$$

gilt. Gemäß der Konstruktion von g und f hat man:

Aus $\omega \in [k]_0$ mit $1 \leq k \leq n$ folgt $g(\omega) \in \text{In } A_k$ und

aus $\omega \in \bigcup_{k > n} [k]_0$ schließt man auf die Existenz eines

$i > n$ mit $\omega \in [i]_0$ und daraus $g(\omega) \in \text{In } A_i \subset \text{In } \bigcup_{r > n} A_r$.

Deshalb hat man

$$g(\omega) \in \bigcap_{j=0}^{m-1} T^{-j} \text{In } g(B_{i_j}) \subset \text{In } \bigcap_{j=0}^{m-1} T^{-j} A'_{i'_j}$$

für die B_{i_j} entsprechenden $A'_{i'_j} \in a_n$.

Dies impliziert jedoch

$$\left| \bigvee_{j=0}^{m-1} S^{-j} b_n \right| \leq N \left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j} a_n \right) \quad \text{und}$$

$$h(S, b_n) \leq \overline{h}(T, a_n) .$$

Die Anwendung von Lemma 1.2.2 ergibt

$$h(S) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{h}(T, a_n) .$$

Im Shiftraum ist jedes b_n auch eine topologische Zerlegung. Aus Satz 1.1.4 folgt $\overline{h}(S, b_n) \geq \overline{h}(T, a_n)$.

Die Gleichung $h(S, b_n) = \overline{h}(S, b_n)$ liefert

$$h(S) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{h}(T, a_n) .$$

Der nächste Satz befaßt sich mit einer Bahneigenschaft.

Für $x \in X$ bezeichne

$$O_T(x) : = \overline{\{ T^k(x) \mid k \in \mathbb{Z} \}}$$

die Bahn des Punktes x .

Es gilt dann der folgende

Satz 1.2.4:

Sei a und (Q, S) wie in Satz 1.2.3.

Besitzt ein Punkt $x \in X$ dichte Bahn, so hat die Bahn eines jeden Punktes $\omega \in Q$ mit $g(\omega) = x$ dieselbe Eigenschaft. Umgekehrt: Ist die Bahn von $\omega \in Q$, für das $g(\omega)$ definiert ist, dicht in Q , so folgt daraus, daß auch $g(\omega)$ dichte Bahn besitzt.

Beweis:

Der zweite Teil des Satzes ist trivial: Sei $\omega \in \Omega$ mit dichter Bahn gegeben und $x := g(\omega)$ sei definiert.

Sei $V \subset X$ beliebige offene Menge. Dann ist $g^{-1}V$ offen und es existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $S^k(\omega) \in g^{-1}V$. Das heißt $g(S^k(\omega)) = T^k(g(\omega)) = T^k(x) \in V$.

Ich beweise nun den ersten Teil. Sei $x \in X$ mit dichter Bahn vorgegeben und $\omega \in \Omega$ mit $g(\omega) = x$. Es ist offenbar hinreichend folgendes zu zeigen: Zu jeder Zylindermenge F gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $S^k(\omega) \in F$.

Sei also $F := [c_0, \dots, c_s]_r$ beliebige Zylindermenge.

Gemäß Konstruktion von Ω gilt dann

$$A = \bigcap_{k=r}^{r+s} T^k \text{In } A_{c_{k-r}} \neq \emptyset \quad (A_{c_k} \in a; 0 \leq k \leq s)$$

Da A offen ist und x dichte Bahn hat, gibt es ein $i \in \mathbb{Z}$ mit $T^i(x) \in A$. Aus $g^{-1}A \subset F$ und $T^i(x) = g(S^i(\omega))$ folgt nun $S^i(\omega) \in g^{-1}(T^i(x)) \subset g^{-1}A \subset F$.

Bemerkung: Dieser Satz hat zwei wichtige Konsequenzen.

Wir wollen sagen, das dynamische System sei topologisch transitiv, wenn ein Punkt $x \in X$ mit dichter Bahn existiert. Besitzt jeder Punkt in X dichte Bahn, so sprechen wir von einem minimalen dynamischen System.

Der Satz 1.2.4 besagt nun, daß (Ω, S) topologisch transitiv genau dann ist, wenn (X, T) es ist.

Man kann hier noch einen Schritt weitergehen. Unter der Annahme, daß g auf Ω definiert ist (vgl. Corollar 1.2.2), ist (Ω, S) genau dann minimal, wenn (X, T) minimal ist.

Als letztes beweisen wir noch das wichtige

Lemma 1.2.3:

Sei a und (Q, S) wiederum wie in Satz 1.2.3 vorausgesetzt.

Für die Menge $C_n := \bigcup_{i \geq n} A_i$ ($A_i \in a; n \in \mathbb{N}$)

gelte $C_n \cap T^k C_n = \emptyset$ ($1 \leq k \leq p$).

Dann folgt für die Menge $C'_n := \bigcup_{i \geq n} [i]_0$:

$$C'_n \cap S^k C'_n = \emptyset \quad (1 \leq k \leq p).$$

Beweis:

Angenommen, man hat $C'_n \cap S^i C'_n \neq \emptyset$ für ein $i \in \{1, \dots, p\}$.

Da die Menge $C'_n \cap S^i C'_n$ offen ist, existiert

$$f(x) = \omega \in f(X_a) \cap C'_n \cap S^i C'_n \quad (f \text{ wie in 1.2.2})$$

Sei etwa $\omega \in [k]_0 \cap S^i [j]_0$. Dann folgt sofort

$$x = g(\omega) \in \text{In } A_k \cap T^i \text{In } A_j \subset C_n \cap T^i C_n.$$

Widerspruch!

Dieses Lemma wird im folgenden Fall äußerst wichtig:

Angenommen, die topologische Zerlegung $a = \{A_1, A_2, \dots\}$

von X ist so beschaffen, daß es eine monoton wachsende

Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$C_n \cap T^i C_n = \emptyset$$

für $1 \leq i \leq p_n$ gibt (C_n sei wie in Lemma 1.2.3 definiert).

Hat man dann eine Folge $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von S-invarianten, normierten Borelmaßen auf dem zugehörigen symbolischen dynamischen System (Ω, S) , die sämtlich

$$\mu_k(\Omega \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}) = 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

erfüllen und die schwach konvergent gegen das Maß μ sind, so gilt

$$\mu(\Omega \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}) = 1 .$$

Dies kann man so einsehen: Sei $E := \{\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Omega \mid \omega_0 = 0\}$. Man muß offenbar nur $\mu(E) = 0$ zeigen.

μ ist von außen regulär (durch offene Mengen), d.i.

$$\mu(F) = \inf \{ \mu(U) \mid F \subset U ; U \text{ offen} \} . \quad (\text{vgl. Jacobs [11]})$$

Dies wenden wir auf E an. Sei U eine offene Umgebung von E , etwa $C'_n \cup E$ (C'_n wie in Lemma 1.2.3 zu C_n erklärt).

Die Voraussetzung an die Folge $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ impliziert

$$\mu_k(E) = 0. \quad \text{Das Lemma 1.2.3 besagt } \mu_k(C'_n) \leq p_n^{-1} .$$

Da U eine offen-abgeschlossene Menge, also eine μ -randlose Menge ist, gilt

$$\mu(U) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U) .$$

Fassen wir zusammen:

$$\begin{aligned} \mu(U) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_k(C'_n) + \mu_k(E)) \\ &\leq p_n^{-1} . \end{aligned}$$

Daraus folgt $\mu(E) = \inf \mu(U) = 0$.

Die Abbildung $g : \Omega \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow X$ transportiert also dann alle Maße μ_k, μ nach X .

Eine wichtige Folgerung des Satzes 1.2.2 sei hier noch angeführt.

Wie bekannt heißt das dynamische System (X, T) strikt ergodisch, wenn es minimal ist, und genau ein T -invariantes, normiertes Borelmaß auf X existiert.

Mithilfe des Corollaires 1.2.2 läßt sich nun leicht beweisen:

Satz 1.2.5:

Sei (X, T) strikt ergodisch mit Maß m , und sei a eine m -randlose topologische Zerlegung mit den Eigenschaften des Corollaires 1.2.2. Dann ist das zugehörige symbolische dynamische System (Q, S) ebenfalls strikt ergodisch.

Beweis:

Die Bemerkung des Satzes 1.2.4 besagt, daß (Q, S) minimal ist. Angenommen, es gibt zwei verschiedene, S -invariante normierte Borelmaße μ und ν auf Q .

Da $f : X_a \longrightarrow f(X_a)$ ein Homöomorphismus ist, kann es nur ein Maß auf $f(X_a)$ geben. Sei etwa $\nu(f(X_a)) = 0$.

Da g stetig ist, erhält man durch den Transport von ν mittels g auf X ein Maß m' . Für dieses gilt

$$m'(X_a) = \nu(g^{-1}(X_a)) = 0, \text{ wenn man } g^{-1}(X_a) \subseteq f(X_a) \text{ hat.}$$

Widerspruch!

Ich muß also noch $g^{-1}(X_a) \subset f(X_a)$ zeigen.

Angenommen, es existiert $\omega \in g^{-1}(X_a) \cap (Q \setminus f(X_a))$.

Sei $x = g(\omega)$ und $\eta \in f(X_a)$ mit $g(\eta) = x$ definiert.

Da $\eta \neq \omega$ gilt, gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\eta_k \neq \omega_k$.

Daraus folgt $T^{-k}(x) \in \text{In } A_{\eta_k}$ und

$$T^{-k}(x) \in \begin{cases} \overline{\text{In } A_{\omega_k}} & (\omega_k \in \mathbb{N}) \\ \bigcup_{j \in \eta_k} \overline{A_j} & (\omega_k = 0) \end{cases}$$

Man erhält also entweder

$$\text{In } A_{\eta_k} \cap \overline{\text{In } A_{\omega_k}} \neq \emptyset$$

oder

$$\text{In } A_{\eta_k} \cap \bigcup_{j \in \eta_k} \overline{A_j} \neq \emptyset,$$

in jedem Fall also die Existenz eines $i \notin \eta_k$ mit $\text{In } A_{\eta_k} \cap \overline{\text{In } A_i} \neq \emptyset$. Das ist ein Widerspruch, da a eine topologische Zerlegung ist.

In diesen Diskussionen ist natürlich die fundamentale Frage offen geblieben, wann a -trennende topologische Zerlegungen existieren. Hierauf möchte ich im nächsten Kapitel eingehen und an dieser Stelle nur darauf verweisen, daß für jedes dynamische System (X, T) eine a -trennende topologische Zerlegung für alle aperiodischen Punkte existiert. Man kann sogar eine solche finden, die die Voraussetzung der Bemerkung nach Lemma 1.2.3 genügt. Im minimalen Fall (strikt ergodischen Fall) kann man für a auch die zusätzlichen Eigenschaften des Corollares 1.2.2 (Satzes 1.2.5) sichern.

KAPITEL 2

TOPOLOGISCHE ERZEUGER

Wie erwähnt wird jetzt die Existenz trennender Zerlegungen diskutiert. Es bedeutet weiterhin (X,T) ein dynamisches System mit kompaktem, metrischen Raum X (mit Metrik $d(\cdot, \cdot)$).

Es wird sich im Paragraphen 2 herausstellen, daß für jedes dynamische System (X,T) eine trennende Zerlegung existiert - zumindest für die Menge der aperiodischen Punkte. Um die Diskussion einfacher zu gestalten, können wir annehmen, daß die aperiodischen Punkte dicht in X liegen. Dies ist natürlich keine wesentliche Einschränkung. Außer der Trennungseigenschaft kann man noch weitere Forderungen an die Zerlegung stellen. Es werden nun solche Eigenschaften den Zerlegungen gegeben, daß man eine einfache Beziehung zwischen der Entropie eines Maßes auf dem zugehörigen symbolischen dynamischen System und der Entropie des transportierten Maßes erhält. Dies ist im wesentlichen Paragraph 3.

§ 1 Topologische Zerlegungen und offene Überdeckungen

Dieser Paragraph hat lediglich vorbereitenden Charakter. Er beinhaltet jedoch zwei fundamentale Sätze, die ganz entscheidend für das weitere sind. Zunächst wird ein Lemma von Rohlin ([18]) in einer topologischen Form bewiesen:

Sei $(Y,S,\mathcal{Z},m)$ ein dynamisches, aperiodisches System. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann eine Menge $F \in \mathcal{Z}$ mit $F \cap S^j F = \emptyset$ ($1 \leq j \leq n$) und $m(F \cup S F \cup \dots \cup S^n F) > 1 - \varepsilon$.

Dieser Satz ist in der Ergodentheorie von entscheidender Bedeutung, und es wird sich auch bei unserem vorliegenden Satz

herausstellen, daß der simulierte Satz entscheidend beim Beweis benutzt wird.

Zweitens soll für gewisse endliche topologische Zerlegungen $a = \{A_1, \dots, A_n\}$ - einer Idee von Goodwyn folgend [9]- für die Größe $\sup_{x \in X} |\{A \in \bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j}a \mid x \in A; \text{ In } A \neq \emptyset\}|$ eine obere Abschätzung gefunden werden.

Wir beginnen zunächst mit dem ersten Problem.

Ein Punkt $x \in X$ heißt periodisch, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $T^k(x) = x$ gibt. Wir wollen verabreden, daß wir als Periode von x jede Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $T^k(x) = x$ ansprechen. Die Menge $P_k = \{x \in X \mid T^k(x) = x\}$ ($k \in \mathbb{Z}; k \neq 0$) nennen wir die Menge der periodischen Punkte mit Periode $k \in \mathbb{Z}$. $P^k = \{x \in X \mid \text{es existiert } 0 < j < k \text{ mit } T^j(x) = x\}$ für $k \in \mathbb{Z}$ bezeichne die Menge aller Punkte in X , die eine Periode $< k$ besitzen. Schließlich sei noch erwähnt, daß ein nicht periodischer Punkt aperiodisch genannt wird.

Nach dieser langen Einführung beweisen wir zunächst ein einfaches Lemma:

Lemma 2.1.1:

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann existiert zu jedem Punkt $x \in X \setminus P^n$ eine Umgebung V von x derart, daß $V \cap T^j V = \emptyset$ für $1 \leq j \leq n-1$ und $d(T^j V) < \varepsilon$ für $0 \leq j \leq n-1$ gilt.

Beweis:

Sei $x \in X \setminus P^n$ beliebig. Dann gibt es $\varepsilon > \eta > 0$ mit

$$d(T^k(x), T^j(x)) > \eta \text{ für } 0 \leq j \neq k \leq n-1.$$

Sei $0 < \eta' < \eta$ derart bestimmt, daß aus $d(y, z) < \eta'$ stets $d(T^k(y), T^k(z)) < 2^{-1} \cdot \eta$ für $0 \leq k \leq n-1$ folgt.

Wir definieren nun $V := K_{\eta'}(x)$.

Dann gilt für $y, z \in T^j V$ ($0 \leq j \leq n-1$) $T^{-j}(y), T^{-j}(z) \in V$, und daraus folgt $d(y, z) < \varepsilon$, d.h. $d(T^j V) < \varepsilon$.

Angenommen nun, es gilt für $k \neq j$: $y \in T^k V \cap T^j V$ ($0 \leq j, k \leq n-1$) dann folgt

$$d(T^k(x), T^j(x)) \leq d(T^k(x), y) + d(y, T^j(x)) < \eta.$$

Widerspruch!

Der nächste Satz beinhaltet das erste gesteckte Ziel. Er wird mittels des Zorn'schen Lemmas bewiesen; man kann jedoch darauf - meiner Meinung nach - verzichten und einen direkten Beweis führen. Er würde wohl etwas komplizierter. Wir verabreden noch, daß mit $\text{In}_A V$ das topologisch Innere der Menge $V \subset A$ bezüglich der von der Topologie in X auf A induzierten Topologie verstanden werden soll; $\overline{\text{In}_A V}$ ist dann der Abschluß in A .

Satz 2.1.1.:

Sei $A \subset X \setminus P^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann gibt es ein $V \subset A$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) $V \subset \overline{\text{In}_A V}$
- ii) $V \cap T^j V = \emptyset$ für $1 \leq j \leq n-1$
- iii) $A \subset \bigcup_{k=-2n+2}^{2n-2} T^k V.$

Beweis:

Wie schon erwähnt, führen wir den Beweis mit Zorns Lemma.

Sei $P := \{ V \subset A \mid V \cap T^j V = \emptyset \quad (1 \leq j \leq n-1); V \subset \overline{\text{In}_A V} \}$

Wir führen auf P die Halbordnung „ $\subset$ “ ein und bemerken, daß $P \neq \emptyset$ ist (Lemma 2.1.1), falls $A \neq \emptyset$ gilt. (Ist $A = \emptyset$, so ist die Aussage des Satzes trivial.)

Sei $P_0 \subset P$ totalgeordnet; wir setzen

$$V_0 := \bigcup_{V \in P_0} V$$

und müssen $V_0 \in P$ nachweisen.

i) Sei $x \in V_0$, etwa $x \in V_i \in P_0$. Dann gilt für jede

offene Umgebung W von x : $W \cap \text{In}_A V_i \neq \emptyset$

Aus $\text{In}_A V_i \subset \text{In}_A V_0$ folgt $W \cap \text{In}_A V_0 \neq \emptyset$.

Daher gilt $V_0 \subset \overline{\text{In}_A V_0}$.

ii) Angenommen, es existiert $x \in V_0 \cap T^j V_0$ für ein $j \in \{1, \dots, n-1\}$, etwa sei $x \in V_i \cap T^j V_k$ mit $V_i, V_k \in P_0$. Da P_0 totalgeordnet ist, gilt o.B.d.A. $V_i \subset V_k$. Dann folgt sofort aus $x \in V_k \cap T^j V_k$ ein Widerspruch.

iii) $V_0 \subset A$ ist trivial.

Zorns Lemma sichert uns nun die Existenz eines maximalen $V \in P$. Die Bedingungen i) und ii) und $V \subset A$ sind automatisch erfüllt, Wir müssen also nur noch iii) zeigen.

Wir führen diesen Nachweis in zwei Schritten.

1.) Angenommen, es gilt für ein $x \in A$

$$\{x, \dots, T^{n-1}(x)\} \cap \bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(\overline{V \cap A}) = \emptyset$$

Da $x \notin P^n$ richtig ist, gibt es wegen Lemma 2.1.1 $U \subset A$ mit $U \subset \overline{\text{In}_A U}$ und $x \in U$, so daß erstens

$$U \cap T^j U = \emptyset \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq n-1$$

und zweitens

$$T^j U \cap \bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(\overline{V \cap A}) = \emptyset \quad \text{gilt.}$$

Definieren wir nun $V_0 := V \cup U$.

Zunächst gilt trivialerweise $V_0 \subset A$ und $V_0 \subset \overline{\text{In}_A V_0}$.

Ferner rechnet man sofort nach:

$$\begin{aligned} V_0 \cap T^j V_0 &= (V \cap T^j V) \cup (V \cap T^j U) \cup (U \cap T^j V) \cup (U \cap T^j U) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Also gilt $V \subsetneq V_0 \in P$, ein Widerspruch.

Man erhält also

$$\{x, \dots, T^{n-1}(x)\} \cap \bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(\overline{V \cap A}) \neq \emptyset, \quad (x \in A),$$

d.h. zu jedem $x \in A$ gibt es ein $j \in \{0, \dots, n-1\}$ mit

$$T^j(x) \in \bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(\overline{V \cap A}), \text{ also } x \in T^{-j} \bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(\overline{V \cap A}).$$

Es folgt $A \subset \bigcup_{j=-n+1}^{n-1} T^j(\overline{V \cap A})$.

2.) Nehmen wir an, daß $(A \cap \overline{V}) \setminus \bigcup_{j=-n+1}^{n-1} T^j V \neq \emptyset$ gilt.

Sei x ein Element dieser Menge. Dann folgt für

$$0 \leq i \leq n-1 \quad T^i(x) \in T^i(\overline{V \cap A}) \setminus \bigcup_{j=-n+1+i}^{n+i-1} T^j V, \text{ also}$$

$$T^i(x) \notin \bigcup_{j=0}^{n-1} T^j V.$$

Wir definieren wiederum $V_0 := V \cup \{x\}$.

Wegen $x \in \overline{\text{In}_A V}$ folgt sofort $V_0 \subset \overline{\text{In}_A V_0}$

und $V_0 \subset A$. Die Gleichung

$$\begin{aligned} V_0 \cap T^j V_0 &= (V \cap T^j V) \cup (V \cap T^j \{x\}) \cup (\{x\} \cap T^j V) \cup \\ &\cup (\{x\} \cap T^j \{x\}) = \emptyset \quad \text{für } 1 \leq j \leq n-1 \end{aligned}$$

zeigt, daß $V_0 \in P$ gilt. Aus $V \not\subset V_0$ folgt der Widerspruch.

Es muß also $(A \cap \overline{V}) \subset \bigcup_{j=-n+1}^{n-1} T^j V$ gelten.

Abschließend erhalten wir also

$$\begin{aligned} A \subset \bigcup_{j=-n+1}^{n-1} T^j (\overline{V \cap A}) &\subset \bigcup_{j=-n+1}^{n-1} T^j \left(\bigcup_{i=-n+1}^{n-1} T^i V \right) \\ &= \bigcup_{j=-2n+2}^{2n-2} T^j V, \end{aligned}$$

und das ist die Bedingung iii) des Satzes.

Bemerkung: Da die Menge P^n abgeschlossen ist, ist

$A := X \setminus P^n$ eine offene Menge. Wendet man den vor-

stehenden Satz auf dieses A an, so bemerkt man zunächst

$\text{In}_A V = \text{In } V$. Der Satz 2.1.1 läßt sich dann so formulieren:

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Menge $V \subset X$ mit folgenden

Eigenschaften:

i) $V \subset \overline{\text{In } V}$

ii) $V \cap T^j V = \emptyset$ für $1 \leq j \leq n-1$

iii) $X \setminus P^n \subset \bigcup_{k=-2n+2}^{2n-2} T^k V.$

Wir beweisen noch ein Corollar für minimale dynamische

Systeme. Es ist klar, daß ein dynamisches System aperi-

odisch genannt wird, wenn jeder Punkt aperiodisch ist.

Corollar 2.1.1:

Sei (X, T) minimal und aperiodisch. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $p \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ (nur von ε abhängig) und ein $V \subset X$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) $V \subset \overline{\text{In } V}$
- ii) $d(V) < \varepsilon$
- iii) $V \cap T^j V = \emptyset$ für $1 \leq j \leq p-1$
- iv) $X = \bigcup_{k=-2p+2}^{m+2p-2} T^k V$

Beweis:

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\emptyset \neq A \subset X$ abgeschlossen mit $d(A) < \varepsilon$ und $\overline{\text{In } A} \supset A$. Da (X, T) minimal ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $X = \bigcup_{k=0}^m T^k A$.

Auf A wendet man Satz 2.1.1 an und erhält $V \subset A$, $V \subset \overline{\text{In } V}$, $V \cap T^j V = \emptyset$ ($1 \leq j \leq p-1$) und $A \subset \bigcup_{k=-2p+2}^{2p-2} T^k V$.

Damit folgt sofort

$$X = \bigcup_{k=0}^m T^k A = \bigcup_{j=0}^m T^j \left(\bigcup_{k=-2p+2}^{2p-2} T^k V \right) = \bigcup_{k=-2p+2}^{m+2p-2} T^k V.$$

Wenden wir uns nun dem zweiten angesprochenen Problem zu. Es ist wesentlich komplizierterer Natur, sodaß ich zuerst einige Vorbereitungen treffen werde. Ich beginne mit

Definition 2.1.1 :

a) Für eine Zerlegung a von X sei

$$p(a, x) := |\{ A \in a \mid x \in \overline{In A} \}| \quad (x \in X)$$

$$p(a) := \sup_{x \in X} p(a, x) .$$

Man beachte, daß diese Definition von der Goodwyn's leicht abweicht.

b) Für eine offene Überdeckung a von X definieren wir

$$\overline{p}(a) := \sup_{x \in X} |\{ A \in a \mid x \in \overline{A} \}| .$$

Um unser Problem zu lösen, wollen wir die Ideen, die Goodwyn in [9] verwendet, leicht abgewandelt benutzen. Unmittelbar aus der Arbeit von Goodwyn [9] (Theorem 1) folgt das folgende Lemma. Wir wollen mit I das abgeschlossene Einheitsintervall und mit I^n den n -dimensionalen, abgeschlossenen Einheitswürfel bezeichnen ($I := [0, 1]$).

Lemma 2.1.1 :

Sei $Y \subset I^n$ ($n \in \mathbb{N}$) beliebige Teilmenge.

Dann gibt es zu **jedem** $\epsilon > 0$ eine endliche offene Überdeckung a von Y mit

$$\max_{A \in a} d(A) < \epsilon .$$

und $\overline{p}(a) \leq n + 1$.

Wir benutzen dieses Lemma, um den folgenden fundamentalen Satz zu beweisen:

Satz 2.1.2 :

Zu jeder endlichen, offenen Überdeckung b von X und jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es eine endliche, offene Überdeckung a von X , die folgende zwei Eigenschaften besitzt:

- i) $a < \bigvee_{k=0}^{m-1} T^{-k}b$
 ii) $\overline{p}(a) \leq |b| \cdot m + 1$.

Beweis:

Sei $b = \{B_1, \dots, B_q\}$.

Wir definieren Abbildungen f_i ($1 \leq i \leq q$) durch

$$f_i: X \longrightarrow I$$

$$f_i(x) := (d(X))^{-1} \cdot d(x, B_i) \quad (x \in X)$$

Die Abbildungen f_i sind sämtlich stetig und damit

auch $f := (f_1, \dots, f_q) : X \longrightarrow I^q$.

Unter $(I^q)^{\mathbb{Z}}$ verstehen wir den Raum

$$(I^q)^{\mathbb{Z}} := \{ (y_1(t), \dots, y_q(t))_{t \in \mathbb{Z}} \mid y_i(t) \in I ; 1 \leq i \leq q \}.$$

Die Abbildung f induziert eine Abbildung

$$f^* : X \longrightarrow (I^q)^{\mathbb{Z}}$$

vermöge $f^*(x) = (y_1(t), \dots, y_q(t))_{t \in \mathbb{Z}} \in (I^q)^{\mathbb{Z}}$

mit $(y_1(t), \dots, y_q(t)) = f(T^t(x)) \quad (t \in \mathbb{Z})$.

Da man auf $(I^q)^{\mathbb{Z}}$ die Produkttopologie hat, ist f^* stetig. Ferner kommutiert f^* mit der Schiebung S auf $(I^q)^{\mathbb{Z}}$: $f^* \circ T = S \circ f^*$. (vgl. [9])

Sei nun $Y := f^*X$. Wir definieren

$$B_i^* := \{ y \in Y \mid y_i(0) > 0 \} \quad \text{für } 1 \leq i \leq q,$$

und $b^* := \{ B_1^*, \dots, B_q^* \}$.

Da zu jedem $y \in Y$ ein $i \in \{1, \dots, q\}$ mit $y_i(0) > 0$ existiert, und jedes B_i^* ($1 \leq i \leq q$) relativ offen in Y ist, folgert man, daß b^* offene Überdeckung von Y ist.

Die Gleichheit $f^{*-1}(B_i^*) = \{ x \in X \mid f_i(x) > 0 \} = B_i$ impliziert

$$f^{*-1}\left(\bigvee_{k=0}^{m-1} S^{-k}b^*\right) = \bigvee_{k=0}^{m-1} T^{-k}f^{*-1}b = \bigvee_{k=0}^{m-1} T^{-k}b. \quad (m \in \mathbb{N})$$

Wählen wir nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig, halten es aber im folgenden fest.

Sei π die Projektion von $(I^q)^{\mathbb{Z}}$ auf I^{qm} , die durch

$$\begin{aligned} \pi((y_1(t), \dots, y_q(t))_{t \in \mathbb{Z}}) &= \\ &= (y_1(0), \dots, y_q(0), y_1(-1), \dots, y_q(-m+1)) \end{aligned}$$

definiert ist. π ist stetig und $\pi(\bigvee_{k=0}^{m-1} S^{-k}b^*)$ ist eine offene Überdeckung von $\pi(Y)$, denn für

$$B = \pi\left(\bigcap_{k=0}^{m-1} S^{-k}B_{i_k}^*\right) \in \pi\left(\bigvee_{k=0}^{m-1} S^{-k}b^*\right)$$

gilt $B = \pi(\{ y \in Y \mid y_{i_k}(-k) > 0 \quad 0 \leq k \leq m-1 \})$
 $= \{ y \in I^{qm} \mid y_{i_k}(-k) > 0 \quad 0 \leq k \leq m-1 \}.$

Wendet man nun Lemma 2.1.2 an, so erhält man eine endliche, offene Überdeckung c von $\pi(Y)$, die eine Verfeinerung von $\pi(\bigvee_{k=0}^{m-1} S^{-k}b^*)$ ist und $\bar{p}(c) \leq mq + 1$ erfüllt.

Definieren wir nun a durch

$$a := f^{*-1}(\pi^{-1}(c)).$$

Da f^* und π stetige Abbildungen sind, enthält a nur offene Mengen. Daß a eine Überdeckung ist, ist ebenso klar. Es folgt auch durch eine leichte Rechnung, daß a eine Verfeinerung von $\bigvee_{k=0}^{m-1} T^{-k}b$ ist.

Ich zeige nun $\overline{p}(a) \leq mq + 1$.

Sei $x \in X$ beliebig und $M_x := \{A \in a \mid x \in \overline{A}\}$.

Da $\pi \circ f^*$ stetig ist, gilt

$$\pi \circ f^*(\overline{A}) \subset \overline{\pi \circ f^*(A)} \quad \text{für } A \in a.$$

Dann kann aber nur $|M_x| < mq + 1$ richtig sein.

Damit ist Satz 2.1.2 bewiesen.

Aus diesem Satz folgen eine Reihe von Corollaren, die aber zum Teil so entscheidend für das weitere sind, daß sie auch als Sätze angeführt werden. Ich beschließe diesen Paragraphen mit diesen Folgerungen.

Man merkt sofort, daß man in Satz 2.1.2 die offene Überdeckung a durch eine (endliche) topologische Zerlegung a' ersetzen kann. a' besitzt dann die Eigenschaft, daß sie einerseits feiner als $\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j}b$ ist und andererseits $p(a') \leq qm + 1$ gilt. Man muß nur a so disjunkt machen, daß Elemente von a' in den entsprechenden von a enthalten sind.

Im nächsten Satz wird diese Bemerkung benutzt:

Satz 2.1.3 :

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine topologische Zerlegung $a = \{A_1, \dots, A_s\}$ ($s \in \mathbb{N}$) mit folgenden Eigenschaften existiert:

- i) $p(a) \leq C(\varepsilon) \cdot m + 1$
- ii) Sind $x, y \in A_i \in a$, so folgt für $0 \leq j \leq m-1$:

$$d(T^j(x), T^j(y)) < \varepsilon .$$

Beweis:

Man wähle eine offene Überdeckung $b = \{B_1, \dots, B_q\}$ von X , die $d(B_i) < \varepsilon$ ($1 \leq i \leq q$) erfüllt. Die Anwendung des Satzes 2.1.2 und obige Bemerkung liefert nun die Behauptung.

Man kann diesen Satz noch ein wenig verschärfen:

Corollar 2.1.3 :

Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt eine Konstante $C = C(n_1, n_2, \varepsilon) = |n_1 - n_2| \cdot C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine topologische Zerlegung $a = \{A_1, \dots, A_q\}$ ($q \in \mathbb{N}$) mit folgenden Eigenschaften existiert:

- i) $p(a) \leq Cm + 1$
- ii) Aus $x, y \in A_i \in a$ folgt für alle $n_1 \leq j \leq n_2 + m - 1$

$$d(T^j(x), T^j(y)) < \varepsilon .$$

Beweis:

Man wähle die offene Überdeckung $b = \{B_1, \dots, B_s\}$ so, daß wenn immer $x, y \in B_i \in b$ $d(T^j(x), T^j(y)) < \epsilon$ für alle $n_1 \leq j \leq n_2$ folgt.

Ich möchte nun abschließend das bis jetzt Gesagte mit Satz 2.1.1 in Zusammenhang bringen.

Sei $\epsilon > 0$ und $m \geq C(\epsilon)$ ($m \in \mathbb{N}$) vorgegeben. Der Satz 2.1.1 liefert $V \subset X$ mit $V \subset \overline{\text{In } V}$, $V \cap T^j V = \emptyset$ für $1 \leq j \leq m-1$ und $X \setminus P^m \subset \bigcup_{k=-2m+2}^{2m-2} T^k V$. Sei $a' = \{A'_1, \dots, A'_s\}$ eine topologische Zerlegung von X , für die die Eigenschaften des Satzes 2.1.3 mit $4m-3$ gelten: $p(a') \leq C(\epsilon) \cdot (4m-3) + 1$ und für $x, y \in A'_i$ folgt $d(T^j(x), T^j(y)) < \epsilon$ ($0 \leq j \leq 4m-4$).

Definieren wir nun

$$a := \{T^{2m-2} A'_i \cap V \mid 1 \leq i \leq s\} \cup \{V\}.$$

Dann hat man

$$p(a) \leq C(\epsilon) \cdot (4m-3) + 2$$

und für $x, y \in T^{2m-2} A'_i \cap V \in a$ gilt

$$T^{-2m+2}(x), T^{-2m+2}(y) \in A'_i,$$

also $d(T^j(x), T^j(y)) < \epsilon$ für $-2m+2 \leq j \leq 2m-2$.

Das heißt nun aber folgendes: Sind $x, y \in X \setminus P^m$, und besuchen x und y zu einem Zeitpunkt $-2m+2 \leq k \leq 2m-2$ die gleiche Menge in a , so folgt daraus schon, daß $d(x, y) < \epsilon$ gilt.

Ich fasse zusammen:

Satz 4.1.4 :

Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $m \geq C(\varepsilon)$ und jedem $V \subset X$ mit den Eigenschaften $V \subset \overline{\text{In } V}$, $V \cap T^j V = \emptyset$ ($1 \leq j \leq m-1$) und $X \setminus P^m \subset \bigcup_{k=-2m+2}^{2m-2} T^k V$ gibt es eine topologische Zerlegung $a = \{A_1, \dots, A_s\}$. a besitzt die folgenden Eigenschaften:

- 1) $A_i \subset V$ für $1 \leq i \leq s-1$; $A_s = \overline{C} V$
- 2) $p(a) \leq 4m^2 + 2$
- 3) Ist $x \in X \setminus P^m$ und $y \in X$ mit $d(x, y) \geq \varepsilon$, so gibt es ein $k \in \{-2m+2, \dots, 2m-2\}$ mit $T^k(x) \in A_i$ und $T^k(y) \notin A_i$ für ein $1 \leq i \leq s-1$.

Bemerkung: Man kann natürlich die Voraussetzung an V fallen lassen, und ebenso diesen Satz statt mit $2m$ mit nm ($n \in \mathbb{N}$) formulieren. Ich werde später von beidem Gebrauch machen.

§2 Topologische Erzeuger

Wenden wir uns nun dem eigentlichen Problem zu. Unter Berücksichtigung der in Kapitel 1 gemachten Definition von a -trennenden topologischen Zerlegungen beginne ich mit:

Definition 2.2.1 :

Sei $a = \{A_1, A_2, \dots\}$ eine abzählbare topologische Zerlegung von X .

a) Die topologische Zerlegung a heißt ein topologischer Erzeuger für $X_0 \subset X$, wenn a a -trennend für X_0 ist. Für $X_0 = X$ sagen wir auch einfach topologischer Erzeuger.

b) Wir sagen, die topologische Zerlegung a sei ein topologischer Erzeuger für das T -invariante, normierte Borelmaß m auf X , wenn a ein topologischer Erzeuger für ein $X_0 \subset X$ mit $m(X_0) = 1$ ist.

Es läßt sich nun das Programm dieses Paragraphen erläutern. Für jedes dynamische System (X, T) soll ein topologischer Erzeuger für $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ konstruiert werden. Da für die verschiedenen Arten von dynamischen Systemen auch verschiedenartige topologische Erzeuger gefunden werden können, ist der vorliegende Paragraph in mehrere Abschnitte gegliedert: Zunächst betrachten wir minimale dynamische Systeme und konstruieren einen topologischen Erzeuger von X mit den Eigenschaften des Corollaires 1.2.2 in Kapitel 1. Anschließend können wir die benutzten Ideen modifizieren: Ist m ein ergodisches, T -invariantes, normiertes Maß auf X , so gibt es einen topologischen Erzeuger für m . Komplizierter wird dann der allgemeine Fall, die Konstruktion eines topologischen Erzeugers für $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$.

Im Paragraphen 3 schließen wir mit einer Diskussion der Brauchbarkeit dieser topologischen Erzeuger.

Als Vorbereitung möchte ich zwei Lemma beweisen, die unmittelbar aus Lemma 1.1.1 und Satz 1.1.1 folgen. Zugrunde liegt hierbei eine schon öfters benutzte Idee (vgl. Rohlin [18] ; vor allem Parry [16]).

Lemma 2.2.1 :

Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $p_{n+1} > p_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem a -periodischen Punkt $x \in X$ eine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver, reeller Zahlen mit $\varepsilon_{n+1} < 2^{-1} \cdot \varepsilon_n$ ($n \in \mathbb{N}$) und eine topologische Zerlegung $a = \{A_0, A_1, \dots\}$, die folgende Eigenschaften besitzt:

$$i) \quad A_k = K_{\varepsilon_k}(x) \setminus \overline{K_{\frac{1}{2}\varepsilon_k}(x)} \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$A_0 = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

$$ii) \quad A_k \cap T^j A_k = \emptyset \quad \text{für } 1 \leq j \leq p_k \quad (k \in \mathbb{N}) .$$

Beweis:

Der Beweis ist klar. da man induktiv Lemma 1.1.1 benutzen kann.

Hiervon ausgehend beweisen wir

Lemma 2.2.2 :

Sei $a' = \{A'_0, A'_1, \dots\}$ eine topologische Zerlegung wie in Lemma 2.2.1. Dann gibt es zu jeder Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen eine topologische Zerlegung $a = \{A_0, A_1, \dots\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) $A_k \subset A'_k$ ($k \in \mathbb{N}$) ; $A'_0 \subset A_0$
- ii) $A_k \subset \overline{\text{In } A_k}$ ($k \in \mathbb{N}$)
- iii) $A_k \cap T^j A_k = \emptyset$ für $1 \leq j \leq q_k$ ($k \in \mathbb{N}$)
- iv) $A'_k \setminus P^{q_k+1} \subset \bigcup_{j=-2q_k}^{2q_k} T^j A_k$ ($k \in \mathbb{N}$) .

Beweis:

Sei $F_k := A'_k \setminus P^{q_k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$).

Wir wenden für jedes $k \in \mathbb{N}$ Satz 2.1.1 auf F_k und q_k an. Wir erhalten also eine Menge $A_k \subset F_k$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) $A_k \subset \overline{\text{In}_{F_k} A_k}$
- ii) $A_k \cap T^j A_k = \emptyset$ für $1 \leq j \leq q_k$

$$\text{iii) } F_k \subset \bigcup_{j=2q_k}^{2q_{k+1}} T^j A_k$$

Wir definieren $a := \{A_1, A_2, \dots\} \cup \{A_0 := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\}$.

Nun muß gezeigt werden, daß a die im Lemma verlangte topologische Zerlegung ist.

Die Eigenschaften i), iii) und iv) des Lemmas sind automatisch erfüllt. Wenden wir uns zunächst ii) zu.

Wir müssen offenbar $\overline{\text{In} A_k} \supset \text{In}_{F_k} A_k$ ($k \in \mathbb{N}$) zeigen. Sei also $y \in \text{In}_{F_k} A_k$. Im ersten Fall wollen wir zusätzlich $y \in \text{In}_{A'_k}$ voraussetzen. Es gibt nun $U \subset X$ offen (in X) mit $U \cap F_k \subset \text{In}_{F_k} A_k$.

Da $\text{In}_{A'_k} \setminus P^{q_{k+1}} \subset F_k$ offen in X ist, folgt

$$y \in U \cap F_k \cap (\text{In}_{A'_k} \setminus P^{q_{k+1}}) = U \cap (\text{In}_{A'_k} \setminus P^{q_{k+1}}) \subset \text{In}_{A_k},$$

das heißt aber $y \in \text{In}_{A_k}$.

Im anderen Fall - $y \in F_k \setminus \text{In}_{A'_k}$ - gibt es eine Folge $y_n \in \text{In}_{A'_k} \cap \text{In}_{F_k} A_k$ mit $y = \varinjlim y_n$, daraus folgt aber sofort $y \in \overline{\text{In}_{A'_k}}$.

Wir haben also ii) nachgewiesen und wollen nun zeigen, daß a eine topologische Zerlegung ist.

Wegen ii) kann man annehmen, daß $\text{In}_{A_k} \neq \emptyset$ gilt. (Sonst wäre $A_k = \emptyset$. Wir wollen stillschweigend annehmen, daß das

nicht der Fall ist.) Aus ii) ebenfalls und $\text{In } A_0 = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{In } A_k}$
folgt sofort $X = \overline{\bigcup_{x \in Z_0} \text{In } A_k}$.

Damit ist dieses Lemma bewiesen.

Unser erstes Ziel ist es - wie schon erwähnt - einen topologischen Erzeuger für ein minimales dynamisches System zu finden. Dieses beinhaltet der nächste Satz:

Satz 2.2.1:

Sei (X, T) ein minimales dynamisches System. Dann existiert zu beliebigem $x \in X$ und zu jeder Nullfolge $(\delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ($\delta_m > 0$) eine topologische Zerlegung $a = \{A_1, A_2, \dots\}$, eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($p_n \in \mathbb{N}$), eine Folge $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ($q_m \in \mathbb{N}$) und eine streng monoton fallende Nullfolge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die durch folgende Eigenschaften miteinander verknüpft sind:

$$1.) \quad q_1 = 2; \quad q_{m+1} > q_m; \quad p_{m+1} > p_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$2.) \quad V_m := \bigcup_{k=q_m}^{q_{m+1}-1} A_k \subset K_{\epsilon_m}(x) \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$3.) \quad V_m \cap T^j V_m = \emptyset \quad \text{für } 1 \leq j \leq p_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$4.) \quad X = \bigcup_{k=-2p_m}^{3p_m} T^k V_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

5.) Sind $y, z \in A_k \subset V_m$ für ein $k \in \{q_m, \dots, q_{m+1} - 1\}$,
so folgt

$$d(T^j(z), T^j(y)) < \delta_m \quad \text{für } -3p_m \leq j \leq 2p_m$$

6.) Für $a_m := \{A_{q_m}, \dots, A_{q_{m+1}-1}\}$, $\left(\bigcup_{i=q_m}^{q_{m+1}-1} A_i\right)$ gilt

$$p(a_m) \leq 5p_m^2 + 2 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

$$7.) \sum_{t=1}^{\infty} \frac{5}{p_t} \log(5p_t^2 + 2) < \infty; \quad \sum_{t=1}^{\infty} \frac{p_t}{p_{t+1}} \cdot \log c(\delta_t) < \infty.$$

Beweis:

1) Zu beliebigem $x \in X$ bestimmen wir vermöge Lemma 2.2.1 eine topologische Zerlegung $b = \{B_0, B_1, \dots\}$. Wir erhalten also zugleich eine Folge $(\varepsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodaß folgendes gilt:

$$i) s_n < s_{n+1}; \quad \varepsilon'_n \geq \frac{1}{2} \varepsilon'_{n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon'_n = 0$$

$$ii) B_n = K_{\varepsilon'_n}(x) \setminus \overline{K_{\frac{1}{2} \varepsilon'_{n+1}}(x)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$iii) B_n \cap T^j B_n = \emptyset \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1 \leq j \leq s_n).$$

Da (X, T) als minimal vorausgesetzt war, existiert eine Folge $(p'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $p'_n < p'_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) und

$$X = \bigcup_{j=0}^{p'_n} T^j B_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zu b und $(p'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ können wir nun mittels Lemma 2.2.2 eine topologische Zerlegung $a' = \{V'_0, V'_1, \dots\}$ mit den dort genannten Eigenschaften gewinnen.

Wir wollen nun Corollar 2.1.3 und Satz 2.1.4 benutzen.

Sei $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die monoton fallende Nullfolge. Zu jedem

σ_n bestimmen wir $p'_{m(n)} \in \mathbb{N}$ der Folge $(p'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit

$$p'_{m(n)} \geq 2 \cdot c(\sigma_n), \quad \sum_{t=1}^{\infty} \frac{5}{p'_m(t)} \log(5p'_m(t) + 2) < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p'_m(t)}{p'_m(t+1)} = 0.$$

Corollar 2.1.3 mit der anschließenden Bemerkung besagt, daß es eine topologische Zerlegung $a_n = \{A_0(n), \dots, A_{r_n}(n)\}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$a) A_k(n) \subset V_m'(n) \quad \text{für } 1 \leq k \leq r_n; A_0(n) = \bigcup V_m'(n)$$

$$b) p(a_n) \leq C(d_n) \cdot (5p_m'(n) + 1) + 2$$

$$c) \text{ Für alle } y, z \in A_k(n) \in a_n \quad (1 \leq k \leq r_n) \text{ folgt}$$

$$d(T^j(y), T^j(z)) < d_n \quad (-3p_m'(n) \leq j \leq 2p_m'(n)).$$

2) Wir definieren nun

$$a) q_n := 2 + \sum_{k=1}^{n-1} r_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$b) p_n := p_m'(n); \quad \varepsilon_n := \varepsilon_m'(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$c) \text{ Ist } k = q_n + j \text{ mit } 0 \leq j \leq r_n - 1, \text{ so sei}$$

$$A_k := A_{j+1}(n)$$

$$A_1 := \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq 2}} A_k$$

$$a := \{A_1, A_2, \dots\}.$$

Daß a die Eigenschaften des Satzes erfüllt, ist nun unmittelbar aus der Konstruktion abzulesen.

Die in diesem Satz konstruierte topologische Zerlegung a ist ein topologischer Erzeuger. Das sieht man am schnellsten so ein: Seien $y, z \in X$ beliebig und sei $c := d(y, z)$. Zu $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $d_n < c$ gilt, gibt es ein $k \in \{-2p_n, \dots, 3p_n\}$ mit $T^{-k}(y) \in V_n$ ((4.)). Wären nun $T^{-k}(y)$ und $T^{-k}(z)$ in demselben Element $A_i \subset V_n$, so würde ein Widerspruch durch $c \leq d_n$ folgen.

Die grundlegende Beweisidee des Satzes 2.2.1 will ich jetzt dazu benutzen, für ein beliebiges minimales dynamisches System einen topologischen Erzeuger mit den Eigenschaften des Satzes 1.2.5 (für ein vorgegebenes Maß m) herzuleiten.

Satz 2.2.2:

Sei (X, T) minimales dynamisches System und m ein normiertes, T -invariantes Borelmaß auf X . Dann existiert ein topologischer Erzeuger $a = \{A_1, A_2, \dots\}$ von X , der aus lauter m -randlosen Mengen besteht. Ferner gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right) = 0.$$

Beweis:

Sei $b = \{B_1, B_2, \dots\}$ eine topologische Zerlegung wie in Lemma 2.2.1. Diese topologische Zerlegung kann zudem so gewählt werden, daß jedes B_n ($n \in \mathbb{N}$) eine m -randlose Menge ist (vgl. Jacobs [11]).

Wir bestimmen Zahlen $m_n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$), so daß

$$X = \bigcup_{i=0}^{m_n} T^i B_n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei nun $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge strikt positiver reeller Zahlen. Wir zerlegen B_n so in m -randlose Mengen $A_i(n)$ ($1 \leq i \leq s_n$), daß für $x, y \in A_i$

$$d(T^k(x), T^k(y)) < \delta_n \quad (0 \leq k \leq -m_n)$$

gilt. Schließlich definieren wir a durch

$$a = \{A_i(n), \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{s_n} A_i(n) \mid 1 \leq i \leq s_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Dann folgt aus der Eigenschaft ii) des Lemmas 2.2.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right) = 0,$$

wenn die Elemente von a noch geschickt umnummeriert werden.

Die Voraussetzung der Minimalität von (X, T) ist nur von Bedeutung bei der Herleitung der Eigenschaft 4.) Bei beliebigen Systemen kann man diesen Schluß nicht nachvollziehen; wohl kann man aber bei der Konstruktion topologischer Erzeuger für ein ergodisches Maß einen ähnlichen Schluß vollziehen.

Satz 2.2.3:

Sei m ein T -invariantes, aperiodisches, normiertes, ergodisches Maß auf X . Dann existiert zu jeder Nullfolge $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($\delta_n > 0$) eine topologische Zerlegung $a = \{A_1, A_2, \dots\}$, ein Punkt $x \in X$, Folgen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen und eine streng monoton fallende Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$1.) \quad q_1 = 2; \quad q_{m+1} > q_m; \quad p_{m+1} > p_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$2.) \quad V_m := \bigcup_{k=q_m}^{q_{m+1}-1} A_k \subset K_{\varepsilon_m}(x) \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$3.) \quad V_m \cap T^j V_m = \emptyset \quad \text{für } 1 \leq j \leq p_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$4'.) \quad m \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} \bigcup_{k=-3p_m}^{3p_m} T^k V_m \right) = 1$$

5.) Sind $y, z \in A_k \subset V_m$ für ein $k \in \{q_m, \dots, q_{m+1}-1\}$,
so folgt $d(T^j(y), T^j(z)) < \sigma_m$ für $-3p_m \leq j \leq 3p_m$

6.) Für $a_m := \{A_{q_m}, \dots, A_{q_{m+1}-1}, \bigcup_{i=q_m}^{q_{m+1}-1} A_i\}$ gilt

$$p(a_m) \leq 6p_m^2 + 2 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zu dem Satz 2.2.1, man beginnt jedoch etwas anders.

Da das Maß m ergodisch ist, gilt für jede meßbare Menge F , die positives Maß besitzt, $m(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k F) = 1$. Hat man daher eine topologische Zerlegung $b = \{B_0, B_1, \dots\}$ der Art des Lemmas 2.2.1 gefunden (eine solche existiert wegen Aperiodizität von m immer), so daß $m(B_i) > 0$ für $i \in \mathbb{Z}_+$ gilt, so existiert eine monoton wachsende Folge $(p'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($p'_n \in \mathbb{N}$) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} m(\bigcup_{j=-p'_n}^{p'_n} T^j B_n) = 1$.

Das ist nichts anderes als Bedingung 4'.)

$$m(\bigcup_{n \geq m} \bigcup_{j=-p'_n}^{p'_n} T^j B_n) = 1 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Von hier ab ist der Beweis wörtlich derselbe.

Um einzusehen, daß die im letzten Satz gewonnene topologische Zerlegung a ein topologischer Erzeuger für m ist, braucht man nur zu bemerken, daß - im Gegensatz zur Bemerkung nach dem Satz 2.2.1 - für fast jedes $x \in X$ lediglich

nur eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, so daß es ein $k \in \{-3p_{n_k}, \dots, 3p_{n_k}\}$ mit $T^k(x) \in V_{n_k}$ gibt.

Ich will - wie gesagt - die Diskussion dieser drei Sätze hier noch nicht beginnen, sondern sie bis zum Schluß zurückstellen. Es erscheint vielmehr angebracht zu versuchen, für ein allgemeines dynamisches System einen ähnlichen Satz zu beweisen. Einige einfache Überlegungen seien vorangestellt. Es ist sofort einzusehen, daß man keinen topologischen Erzeuger für X erhalten kann, wenn P^n für ein $n \in \mathbb{N}$ nicht endlich oder abzählbar ist. Deshalb werden wir zunächst einen topologischen Erzeuger für $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ konstruieren. Anhand eines einfachen Beispiels überlegt man sich ferner sehr leicht, daß die Bedingung 2.) der Sätze 2.2.1 und 2.2.3 im allgemeinen nicht erfüllt werden kann, selbst wenn man sich nur die Aufgabe gestellt hat, einen topologischen Erzeuger für $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ zu konstruieren. Es wird sich jedoch herausstellen, daß dies die beiden einzigen Dinge sind, die man weglassen lassen muß.

Ich werde also - entsprechend dem ersten Teil dieses Paragraphen - mit einem Lemma beginnen.

Lemma 2.2.3:

Zu jeder strikt monotonen Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen gibt es eine topologische Zerlegung $a = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$1) \quad A_n \cap T^j A_n = \emptyset \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq p_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{ii) } A_n \subset \overline{\text{In } A_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

iii) Zu jedem aperiodischen $x \in X$ gibt es eine

Teilfolge $(p_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ derart, daß

$$x \in \bigcup_{j=-3p_{n_k}}^{3p_{n_k}} T^j A_{n_k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

gilt.

Beweis:

Wir werden wieder entscheidend Satz 2.1.1 benutzen.

(Daß wir Lemma 2.1.1 nicht benötigen, liegt daran, daß Bedingung 2.) wegfallen soll.)

In einem ersten Schritt soll eine topologische Zerlegung b konstruiert werden. Wir gehen induktiv wie folgt vor:

Sei $c_1 = 1$. Satz 2.1.1 gibt uns $V_1 \subset X \setminus P^2$ mit $V_1 \cap TV_1 = \emptyset$; $V_1 \subset \overline{\text{In } V_1}$ und $X \setminus P^2 \subset \bigcup_{k=-2}^2 T^k V_1$.

Wählen wir nun $c_2 \in \mathbb{N}$ mit $\text{In } V_1 \cap T^{c_2}(\text{In } V_1) \neq \emptyset$ (oder $\text{In } V_1 \cap T^{-c_2}(\text{In } V_1) \neq \emptyset$). Notwendigerweise ist $c_2 > c_1$.

Wenden wir nun wieder Satz 2.1.1 an, so erhalten wir $V_2 \subset V_1 \setminus P^{c_2+1}$ mit den bekannten Eigenschaften:

$$V_2 \subset \overline{\text{In } V_2}; \quad V_2 \cap T^j V_2 = \emptyset \quad (1 \leq j \leq c_2);$$

$$V_1 \setminus P^{c_2+1} \subset \bigcup_{k=-2c_2}^{2c_2} T^k V_2.$$

Ist nun $V_1, \dots, V_m$ und $c_1, \dots, c_m$ schon gewählt, sei $c_{m+1} > c_m$ (!) so bestimmt, daß entweder

In $V_m \cap T^{c_{m+1}} (In V_m) \neq \emptyset$ oder

In $V_m \cap T^{-c_{m+1}} (In V_m) \neq \emptyset$ gilt.

Mittels Satz 2.1.1 findet man $V_{m+1} \subset V_m \setminus P^{c_{m+1}+1}$ mit

$$V_{m+1} \subset \overline{In V_{m+1}}, \quad V_{m+1} \cap T^j V_{m+1} = \emptyset \quad (1 \leq j \leq c_{m+1}),$$

$$V_m \setminus P^{c_{m+1}+1} \subset \bigcup_{k=-2c_{m+1}}^{2c_{m+1}} T^j V_{m+1}.$$

Definieren wir nun $b = \{B_0, B_1, \dots\}$ durch

$$B_m := \overline{V_m \setminus V_{m+1}} \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$B_0 := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k.$$

Man sieht sofort, daß b eine topologische Zerlegung ist.

Eine leichte Rechnung zeigt ferner, daß $B_m \subset \overline{In B_m}$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei $Y := X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$. Ich will nun für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$Y \subset \bigcup_{m \geq n} \bigcup_{j=-p'_n}^{p'_n} T^j B_m \quad \text{für passende } p'_n \in \mathbb{N} \quad (n \in \mathbb{N})$$

zeigen.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Konstruktion $\bigcup_{m \geq n} B_m \supset V_n$.

Aus $V_{r-1} \setminus P^{c_r+1} \subset \bigcup_{k=-2c_r}^{2c_r} T^k V_r$ für $r \in \mathbb{N}$ folgt

nacheinander

$$V_1 \setminus P^{c_n+1} \subset \bigcup_{k=-2 \sum_{j=2}^n c_j}^{2 \sum_{j=2}^n c_j} T^k V_n$$

$$Y \subset \bigcup_{j=-2}^2 T^j (V_1 \setminus P^{c_n-1}) \subset \bigcup_{k=-2 \sum_{j=1}^n c_j}^{2 \sum_{j=1}^n c_j} T^k B_m \quad m \geq n.$$

Setzen wir nun $p'_n := 2 \sum_{k=1}^n c_k$ für $n \in \mathbb{N}$.

Der zweite Schritt soll sich mit der Konstruktion der topologischen Zerlegung a befassen.

Sei also $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige, strikt monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen.

Sei $N_m := \{k \in \mathbb{N} \mid p_{m-1}+1 \leq p'_k \leq p_m\}$ ($m \in \mathbb{N}$) und

$C_m := \bigcup_{k \in N_m} B_k$ ($m \in \mathbb{N}$). Wenden wir nun wieder Satz 2.1.1

auf C_m und p_m an, so erhalten wir $A_m \subset C_m$ mit

$A_m \subset \overline{\text{In } A_m}$, $A_m \cap T^j A_m = \emptyset$ für $1 \leq j \leq p_m$ und

$C_m \setminus p_m^{p_m+1} \subset \bigcup_{k=-2p_m}^{2p_m} T^k A_m$. Definieren wir noch

$A_0 := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ und $a := \{A_0, A_1, \dots\}$, so ist aus

der Konstruktion sofort abzulesen, daß a eine topologische Zerlegung ist, die die Eigenschaften i) und ii) des Lemmas besitzt.

Man muß also nur noch iii) zeigen.

Betrachtet man für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Inklusion

$$\begin{aligned} Y &\subset \bigcup_{j \geq n(m)} \bigcup_{k=p'_n(m)}^{p'_n(m)} T^k B_j \\ &\subset \bigcup_{j \geq n(m-1)+1} \bigcup_{k=-p_m}^{p_m} T^k B_j \\ &\subset \bigcup_{i \geq m} \bigcup_{k=-3p_m}^{3p_m} T^k A_i, \end{aligned}$$

wobei $p'_n(m) = \min_{k \in N_m} p'_k$ ist, so läßt sich - einem

bekannten Schluß zufolge - zu jedem $x \in Y$ eine Teilfolge $(p_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ derart finden, daß

$$x \in \bigcup_{j=-3p_m}^{q_m} T^j A_{m_k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

gilt.

Dieses Lemma benutzend können wir nun einen allgemeinen Satz über die Existenz topologischer Erzeuger beweisen.

Satz 2.2.4:

Es einer streng monoton fallenden Nullfolge $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert eine topologische Zerlegung $a = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$, streng monoton wachsende Folgen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, sodaß die folgenden Bedingungen gelten:

$$1.) \quad q_1 = 2; \quad q_{m+1} > q_m; \quad p_{m+1} > p_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$3.) \quad \text{Sei } V_m = \bigcup_{k=q_m}^{q_{m+1}-1} A_k \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$V_m \cap T^k V_m = \emptyset \quad \text{für } 1 \leq k \leq p_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$4.) \quad X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset \bigcup_{n \geq m} \bigcup_{k=-3p_m}^{3p_m} T^k V_n \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$5.) \quad \text{Sind } y, z \in A_k \subset V_m \text{ für ein } k \in \{q_m, \dots, q_{m+1}-1\}$$

so folgt

$$d(T^j(y), T^j(z)) < \delta_m \quad \text{für } -3p_m \leq j \leq 3p_m.$$

$$6.) \quad \text{Für } a_m = \{A_{q_m}, \dots, A_{q_{m+1}-1}\}, \bigcup_{i=q_m}^{q_{m+1}-1} A_i \text{ gilt}$$

$$p(a_m) \leq 6p_m^2 + 2 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

$$7.) \sum_{t=1}^{\infty} \frac{6}{p_t} \log(6p_t^2 + 2) < \infty; \quad \sum_{t=1}^{\infty} \frac{p_t}{p_{t+1}} \cdot \log C(\delta_t) < \infty.$$

Beweis:

Sei $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Nullfolge.

Wir bestimmen $p_n \geq 2 C(\sigma_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften 7.) (vgl. Satz 1.1.3).

Wenden wir nun das Lemma 2.2.3 auf die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an ($(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann als monoton anwachsend angenommen werden), so erhalten wir eine topologische Zerlegung $b = \{B_i \mid i \in \mathbb{Z}_+\}$ mit den dort genannten Eigenschaften.

Mit Hilfe des Satzes 2.1.4 finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine topologische Zerlegung $a_n = \{A_0(n), \dots, A_{q'_n}(n)\}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$i) A_i(n) \subset B_n \quad (1 \leq i \leq q'_n) \quad , \quad A_{q'_n}(n) = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r$$

$$ii) p(a_n) \leq 6p_n^2 + 2$$

iii) Sind $y, z \in A_i(n)$ für $1 \leq i \leq q'_n$, so folgt

$$d(T^j(y), T^j(z)) < \sigma_n \quad \text{für} \quad -3p_n \leq j \leq 3p_n.$$

Definieren wir nun a !

Für die Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nehmen wir $q_n := 2 + \sum_{k=1}^{n-1} q'_k$.

Sei nun $j \in \mathbb{N}$ und j habe die eindeutige Darstellung

$j = q_n + i$ mit $0 \leq i \leq q'_n - 1$. Dann setzen wir für

$$j \geq 2 \quad A_j := A_{i+1}(n)$$

$$j = 1 \quad A_1 := \bigcup_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \geq 2}} A_j.$$

Schließlich sei $a := \{A_1, A_2, \dots\}$. Anhand der Konstruktion ist sofort abzulesen, daß a die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Bemerkung: Die in diesem Satz erhaltene topologische Zerlegung ist natürlich ein topologischer Erzeuger, jedoch nur für die aperiodische Menge in $X : X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$. Dies zeigt man ganz ähnlich wie bei den Sätzen 2.2.1 und 2.2.3.

Ich hatte vorhin bemerkt, daß man sicher keinen topologischen Erzeuger gewinnen kann, wenn die periodischen Punkte überabzählbar sind. Was kann man aber erreichen, wenn dies nicht der Fall ist? Einen Fall behandelt das folgende Corollar.

Corollar 2.2.4:

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gelte $|P_k| < \infty$. Dann gibt es zu jeder monoton fallenden Nullfolge $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine topologische Zerlegung $a = \{A_1, A_2, \dots\}$ und streng monoton wachsende Folgen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so daß folgendes gilt:

$$1.) \quad q_1 = 2; \quad q_{m+1} > q_m; \quad p_{m+1} > p_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$3.) \quad \text{Sei } V_m := \bigcup_{k=q_m}^{q_{m+1}-1} A_k.$$

$$V_m \cap T^j V_m = \emptyset \quad \text{für } 1 \leq j \leq p_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$4.) \quad X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset \bigcup_{n \leq m} \bigcup_{j=-3p_m}^{3p_m} T^j V_n \quad (m \in \mathbb{N})$$

5.) Sind $y, z \in A_k \subset V_m$ für ein $k \in \{q_m, \dots, q_{m+1}-1\}$,
so folgt

$$d(T^j(y), T^j(z)) < \delta_m \text{ für } -3p_m \leq j \leq 3p_m.$$

Für jedes $A_k \subset V_m$ ($q_m \leq k \leq q_{m+1}-1$) gilt

$$|A_k \cap P^{p_{m+1}+1}| \leq 1 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

6.) Für $a_m := \{A_{q_m}, \dots, A_{q_{m+1}-1}, \bigcup_{i=q_m}^{q_{m+1}-1} A_i\}$ ($m \in \mathbb{N}$)

gilt $p(a_m) \leq 6p_m^2 + 3$.

7.) $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{6}{p_t} \log(6p_t^2 + 3) < \infty$; $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{p_t}{p_{t+1}} \cdot \log C(\delta_t) < \infty$.

Beweis:

Sei $a' = \{A'_1, A'_2, \dots\}$ mit den Folgen $(p'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (q'_n)_{n \in \mathbb{N}}$
und $(\delta'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine topologische Zerlegung wie im Satz 2.2.4.
Da für jedes $m \in \mathbb{N}$ $V_m \cap P^{p_{m+1}+1} =: \{x_1^m, \dots, x_{r_m}^m\}$
endlich ist, gibt es ein $\varepsilon_m > 0$ mit

$$K_{\varepsilon_m}(x_j^m) \cap P^{p_{m+1}+1} = \{x_j^m\} \quad (1 \leq j \leq r_m).$$

Definieren wir nun $q_m := q'_m + \sum_{k=1}^{m-1} r_k$, $p_m := p'_m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Für $m \in \mathbb{N}$ und $q_m \leq k \leq q_{m+1}-1$ setzen wir

$$A_k := K_{\varepsilon_m}(x_{q_{m+1}-k}^m) \cap V_m \quad (q_{m+1}-k \leq r_m)$$

$$A_k := A'_{k-q_m} \cap q'_m \quad (q_m \leq k \leq q_{m+1}-1-r_m)$$

Setzen wir noch $A_1 := \bigcup_{i=2}^{\infty} A_i$, so ist

$a := \{A_1, A_2, \dots\}$ eine topologische Zerlegung, die die Eigenschaften 1.) - 5.) trivialerweise erfüllt.

6.) folgt sofort aus der Tatsache, daß - wenn ε_m klein genug ist - jeder Punkt in V_m in höchstens einer Menge $K_{\varepsilon_m}(x_j)$ ($1 \leq j \leq r_m$) liegt, das heißt also

$$p(a_m) \leq p(a'_m) + 1 \leq 6p_m^2 + 3.$$

§3 Entropie transportierter Maße

An dieser Stelle sollen die Resultate des letzten Paragraphen diskutiert werden. Ich beginne mit einer Wiederholung.

Satz 2.3.1: (vgl. Satz 1.2.2)

Sei $a = \{A_1, A_2, \dots\}$ eine topologische Zerlegung von X , die a -trennend für $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ ist. Dann gibt es einen abgeschlossenen Teilshift $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$, einen Teilshift $\Omega' \subset \Omega \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ und eine stetige Abbildung

$$g : \Omega' \longrightarrow X$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) $T \circ g = g \circ S$

2) Für die vermöge Satz 1.2.1 gewonnene Abbildung

$$f : X_a \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \longrightarrow \Omega \text{ gilt}$$

$$\mathcal{E}|_f(X_a \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k) = f^{-1}$$

3) Für $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Omega'$ gilt $\{g((\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}})\} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k \overline{\text{In } A_{\omega_k}}$.

4) $\Omega' = \{(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \mid \left| \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k \overline{\text{In } A_{\omega_k}} \right| = 1\}$.

Der Beweis dieses Satzes ist fast wörtlich derselbe wie der entsprechende Beweis in Kapitel 1, wie man sofort sehen kann. Ich will ihn deshalb weglassen.

Befassen wir uns jedoch ein wenig mit dem in diesem Satz auftretenden Ω' unter der Voraussetzung, daß wir einen topologischen Erzeuger der Sätze 2.2.1 und 2.2.4 zugrunde legen. Ich will in diesem Fall Ω' näher charakterisieren.

Betrachten wir einen Punkt $\omega \in \Omega \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ und eine Folge $(\omega^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $f(X_a \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k)$ mit $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega^n$.

Zunächst stellt man fest, daß $\bigcap_{k=-\infty}^{\infty} T^k \overline{A_{\omega_k}} \neq \emptyset$ gelten

muß. Das folgt aus einem bekannten Kompaktheitsargument (vgl. Kapitel 1). Ferner weiß man, enthält die Menge $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k \overline{A_{\omega_k}}$ schon einen aperiodischen Punkt, so muß sie einpunktig sein. Dies besagt gerade die Voraussetzung, daß a a -trennend für $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ ist.

Somit enthält Ω' alle Punkte $\omega \in \Omega \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, deren zugeordnete Menge $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k \overline{A_{\omega_k}}$ einen aperiodischen Punkt enthält. Untersuchen wir also, wann die dem Punkt zugeordnete Menge nur periodische Punkte enthält. Bestimmt ist dies der Fall, wenn ω selbst periodisch ist. Die Komponentenmenge von $\omega : \{\omega_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist

hier also beschränkt. Eine berechnete Frage ist:

Kann es überhaupt einen Punkt in $\Omega \cap \mathbb{N}^2$ mit beschränkter Komponentenmenge geben? Die Antwort hierauf

ist nein. Denn angenommen, man hat einen solchen

Punkt ω . Es gibt eine Folge $\omega^n \in f(X_a \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k)$ mit

$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega^n$. Sei $m \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, daß q_m größer

als die obere Schranke der Menge $\{\omega_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist. Es gibt zu

jedem $n \in \mathbb{N}$ ein k_n ($-3p_m \leq k_n \leq 3p_m$) mit

$$T^{k_n}(f^{-1}(\omega^n)) \in \bigcup_{j \geq m} V_j.$$

Da die Menge $\{k_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ endlich ist, gibt es ein k

in ihr und eine Teilfolge $(\omega^{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$T^k(f^{-1}(\omega^{n_j})) \in \bigcup_{i \geq m} V_i.$$

Das bedeutet aber

$$\omega_{-k}^{n_j} \geq q_m, \text{ also auch } \omega_{-k} \geq q_m$$

wegen der Konvergenz in $\mathbb{N}^2$. Widerspruch!

Da wir nun gesehen haben, daß die Komponentenmenge von

$\omega \in \Omega \cap \mathbb{N}^2$ unbeschränkt sein muß, nehmen wir an, daß

dies der Fall ist, und $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k \overline{\text{In } A_{\omega_k}}$ die periodischen

Punkte x und y - mit den Perioden m_x und m_y - enthält.

Wir bestimmen $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $6p_{n_0} \geq m_x \cdot m_y$ und $d_{n_0} < d(x, y)$.

Sei $k \in \mathbb{Z}$ so bestimmt, daß $T^k(x), T^k(y) \in \overline{\text{In } A_{\omega_{-k}}} \subset V_n$

mit $n \geq n_0$ gilt. Dann folgt

$$d(T^j(T^k(x)), T^j(T^k(y))) \leq d_n \text{ für } -3p_n \leq j \leq 3p_n,$$

d.h. für $k + j = 0 \bmod m_x \cdot m_y$ $d(x,y) \leq \sigma_n \leq \sigma_{n_0} < d(x,y)$.

Dieser Widerspruch zeigt, daß $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k \overline{\text{In } A_{\omega_k}}$ nur einen periodischen Punkt und damit überhaupt nur einen Punkt enthält. Wir erhalten also das etwas überraschende Resultat, daß $\Omega' = \Omega \cap \mathbb{N}^2$ gilt.

Ich fasse dies nochmals zusammen:

Satz 2.3.1:

Sei a eine topologische Zerlegung wie in Satz 2.2.4.

Dann gibt es einen abgeschlossenen Teilshift $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$ und eine stetige Abbildung

$$g : \Omega \cap \mathbb{N}^2 \longrightarrow X$$

mit den Eigenschaften des Satzes 1.2.2:

$$1) T \circ g = g \circ S$$

$$2) g|_{f(X_a)} = f^{-1}$$

$$3) \text{ Für } \omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Omega \cap \mathbb{N}^2 \text{ gilt } \{g(\omega)\} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k \overline{\text{In } A_{\omega_k}}.$$

Bemerkung: Ist das dynamische System (X, T) minimal, so existiert laut Satz 2.2.1 ein topologischer Erzeuger (für X). Darauf kann man Corollar 1.2.2 direkt anwenden und erhält als Definitionsbereich von g ganz Ω .

Beschäftigen wir uns nun noch mit den Sätzen 1.2.3 und 1.2.4 und Lemma 1.2.3. Die Beweise dieser Sätze benutzen an keiner Stelle die Voraussetzung, daß die zugrunde gelegte topologische Zerlegung a -trennend für $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ ist. Deshalb lassen sich die dort gemachten Aussagen wörtlich auf den oben besprochenen Fall übertragen.

Es liegt also insbesondere die Situation vor, die im Anschluß an Lemma 1.2.3 beschrieben wurde.

Satz 1.2.5 läßt sich so formulieren: (vgl. Satz 1.2.2)

Jedes strikt ergodische System ist isomorph zu einem strikt ergodischen symbolischen dynamischen System.

Ich will nun noch auf die Bedingung 6.) in den Sätzen 2.2.1 und 2.2.4 eingehen. Setzen wir voraus, daß wir schon einen topologischen Erzeuger der Art des Satzes 2.2.4 oder 2.2.1 für das System (X, T) haben und daraus mittels Satz 2.3.1 das zugehörige symbolische dynamische System (Ω, S) gewonnen haben. Mit g bezeichne ich also wieder die stetige Abbildung $g : \Omega \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow X$ des Satzes 2.3.1. Ist m ein Maß auf $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \cap \Omega$, so soll g_m das von m mittels g transportierte Maß auf X sein. Für normierte, ergodische Maße m und g_m besteht die folgende Beziehung zwischen den Entropien:

Satz 2.3.2:

Sei m ein normiertes S -invariantes, ergodisches Borelmaß auf $\Omega \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, sodaß g_m keine Atome besitzt. Dann gilt

$$h_{g_m}(T) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} h_m(S, b_n) ,$$

wobei $b_n := \{ [j]_0 \mid q_n \leq j \leq q_{n+1}-1 \} \cup \left(\bigcup_{i=q_n}^{q_{n+1}-1} [i]_0 \right)$

mit den q_n ($n \in \mathbb{N}$) des Satzes 2.2.4 definiert ist.

Bevor ich diesen Satz beweisen kann, muß ich einige Lemmata vorweg zeigen.

Lemma 2.3.1:

Für jedes normierte, S-invariante Borelmaß m auf $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} h_m(S, b_n)$.

Beweis:

Sei $s \in \mathbb{N}$ fest gewählt und sei

$$w_n := \bigcup_{j=q_n}^{q_{n+1}-1} [j]_0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$b_n^s := \{B \cap w_n, \bigcup_{j=-3p_n}^{3p_n} S^j b_s\} \vee b_n \quad (n > s).$$

Bezeichnen wir mit $[c]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $c \in \mathbb{R}$.

Es existiert $\varepsilon > 0$, so daß

$$\sup_{x \in X} |\{A \in a_s \mid \pi_\varepsilon(x) \cap \text{In } A \neq \emptyset\}| \leq 6p_s^2 + 2$$

gilt.

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $d_n^f < \varepsilon$ gilt, folgt für

$$q_n \leq j \leq q_{n+1}-1: d(T^{i_{A_j}}) < \varepsilon \quad (-3p_n \leq i \leq 3p_n).$$

Sei

$$M_j := \left\{ (i_{-3p_n}, \dots, i_{3p_n}) \left| \begin{array}{l} \text{In } \bigcup_{k=-3p_n}^{3p_n} T^{-k} A'_{i_k} \cap \text{In } A_j \neq \emptyset \\ \text{für } A'_{i_k} \in a_s; A'_{i_k} = A_{i_k} \quad (q_s \leq i_k \leq q_{s+1}-1) \end{array} \right. \right\}$$

$$M_j(k_1, \dots, k_r) :=$$

$$\{(i_{-3p_n}, \dots, i_{3p_n}) \in M_j \mid q_s \leq i_{k_1} \leq q_{s+1}-1 \text{ und}$$

$$A'_{i_j} = \bigcup_{s} V_s \text{ für } j \neq k_1, 1 \leq l \leq r\}$$

$$L_R^j := \{M_j(k_1, \dots, k_r) \neq \emptyset \mid -3p_n \leq k_1 \leq 3p_n; 1 \leq l \leq r\}.$$

Die obige Bemerkung und die Bedingung 6.) des Satzes 2.2.4 bedeutet

$$|M_j(k_1, \dots, k_r)| \leq (6p_s^2 + 2)^r$$

für jedes $q_n \leq j \leq q_{n+1}-1$ und alle $k_1, \dots, k_r \in \{-3p_n, \dots, 3p_n\}$.

Aus $k_{l+1} - k_l > p_s$ für jedes $l \in \{1, \dots, r-1\}$ folgt

sowohl

$$|L_R^j| \leq \binom{\left\lfloor \frac{6p_n}{p_s} \right\rfloor + 1}{r} p_s^r \quad \text{für } 0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{6p_n}{p_s} \right\rfloor + 1$$

als auch

$$L_R^j = \emptyset \quad \text{für } r > \left\lfloor \frac{6p_n}{p_s} \right\rfloor + 1.$$

Faßt man dieses alles zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} |M_j| &= \sum_{k_1, \dots, k_r} |M_j(k_1, \dots, k_r)| \\ &\leq (6p_s^2 + 2)^{\left\lfloor \frac{6p_n}{p_s} \right\rfloor + 1} \cdot \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{6p_n}{p_s} \right\rfloor + 1} |L_R^j| \\ &\leq ((6p_s^2 + 2) \cdot (p_s + 1))^{\left\lfloor \frac{6p_n}{p_s} \right\rfloor + 1}. \end{aligned}$$

Daraus schließt man sofort

$$\max_{q_n \leq j \leq q_{n+1}-1} \left| \left\{ B \in \bigvee_{j=-3p_n}^{3p_n} S^j b_s \mid B \cap [j]_0 \neq \emptyset \right\} \right| \leq ((p_s + 1)(6p_s^2 + 2))^{\left\lfloor \frac{6p_n}{p_s} \right\rfloor + 1}$$

Ich stelle noch fest, daß Lemma 1.2.3

$$m(W_n) \leq p_n^{-1}$$

nach sich zieht.

Für die bedingt Entropie von b_n^s unter b_n gilt also

$$\begin{aligned} H_m(b_n^s | b_n) &:= - \sum_{F \in b_n} \sum_{E \in b_n^s} \frac{m(F \cap E)}{m(F)} \cdot \log \frac{m(F \cap E)}{m(F)} \\ &= - \sum_{\substack{F \in b_n \\ F \subset W_n}} \sum_{E \in b_n^s} \frac{m(F \cap E)}{m(F)} \log \frac{m(F \cap E)}{m(F)} \\ &\leq \sum_{F \subset W_n} m(F) \cdot \left(\left\lceil \frac{6p_n}{p_s} \right\rceil + 1 \right) \cdot \log((6p_s^2 + 2)(p_s + 1)) \\ &= m(W_n) \cdot \left(\left\lceil \frac{6p_n}{p_s} \right\rceil + 1 \right) \cdot \log((6p_s^2 + 2)(p_s + 1)) \\ &\leq 1/p_n \cdot \left(\left\lceil \frac{6p_n}{p_s} \right\rceil + 1 \right) \cdot \log((6p_s^2 + 2)(p_s + 1)) \end{aligned}$$

Aus $b_n^s \prec b_n$ folgt $H_m(b_n | b_n^s) = 0$, also hat man

$$|h_m(S, b_n^s) - h_m(S, b_n)| \leq 1/p_n \cdot \left(\left\lceil \frac{6p_n}{p_s} \right\rceil + 1 \right) \cdot \log((6p_s^2 + 2)(p_s + 1))$$

Ich will nun $|h_m(S, b_n^s) - h_m(S, b_s)|$ abschätzen.

Aus der Konstruktion von a ist klar, daß

$$\Omega \cap \mathbb{N}^2 \subset \bigcup_{j=-3p_n}^{3p_n} S^j \bigcup_{k \geq n} W_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt. Daraus folgt für $b_s' := \{B \cap \bigcup_{j \geq n} W_j \mid B \in \bigvee_{k=-3p_n}^{3p_n'} S^k b_s\} \cup \{\bigcup_{j \geq n} W_j\}$

$$h_m(S, b_s) = h_m(S, b_s') .$$

Sei $b_0 := \{B \cap W_n, \bigcup_{k \geq n} W_k \mid B \in \bigvee_{k=-3p_n}^{3p_n'} S^k b_s\}$.

Man erhält sofort

$$H_m(b'_s | b_0) \leq 6p_n^{1/2}/p_{n+1} \cdot H_m(b_s);$$

mit $b'_s < b_0$ hat man

$$|h_m(S, b'_s) - h_m(S, b_0)| \leq 6p_n^{1/2}/p_{n+1} \cdot H_m(b_s).$$

Ich fasse nun zusammen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ groß genug gilt unter Beachtung von $b_n^s < b_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \cdot p_{n+1}^{-1} = 0$:

$$h_m(S, b_n) \geq h_m(S, b_n^s) - \varepsilon \geq h_m(S, b_0) - \varepsilon$$

$$\geq h_m(S, b'_s) - 2\varepsilon \geq h_m(S, b_s) - 2\varepsilon.$$

Wir sind jetzt fast fertig: Sei $M < \limsup_{n \rightarrow \infty} h_m(S, b_n)$ beliebig. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$h_m(S, b_n) > M - \varepsilon \quad (n \geq n_0).$$

Man braucht nur $s \in \mathbb{N}$ mit $h_m(S, b_s) \geq M$ wählen und das oben bewiesene benutzen.

Das zeigt aber, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} h_m(S, b_n)$ existiert.

Lemma 2.3.2:

Sei m ein normiertes, T -invariantes, aperiodisches Borelmaß auf X . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_m(T, a_n) = h_m(T).$$

Beweis:

Für $m, n \in \mathbb{N}$; $n \geq m$ sei $c_m^n := a_m \vee a_{m+1} \vee \dots \vee a_n$.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist dann $(c_m^n)_{n \geq m}$ eine verfeinernde Folge endlicher Zerlegungen; man überlegt sich ebenso wie im Anschluß an Satz 2.2.4, daß die gemeinsame Verfeinerung der c_m^n ($n \geq m$) die σ -Algebra (m -fast sicher) erzeugt. Man benötigt hierbei die Aperiodizität. Ein bekannter Satz von Rohlin [18] impliziert

$$h_m(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_m(T, c_m^n)$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m}^{\infty} 6/p_k \cdot \log(6p_k^2 + 2) < \frac{1}{2} \varepsilon$$

und sodann $n \in \mathbb{N}$ mit $h_m(T, c_m^n) > h_m(T) - \varepsilon$.

Zu $r \in \mathbb{N}$, das groß genug ist, betrachten wir

$$d := \{C \cap \bigcup_{j \geq r} V_j; \bigcap_{j \geq r} V_j \mid C \in \bigvee_{j=-3p_r}^{3p_r} T^j c_m^n\}$$

$$d' := \{C \cap V_r; \bigcap V_r \mid C \in \bigvee_{j=-3p_r}^{3p_r} T^j c_m^n\}.$$

Es gilt analog zum letzten Beweis:

$$H_m(d \mid d') \leq 6p_r^{1/p_{r+1}} \cdot H_m(c_m^n),$$

es folgt also mit $d < d'$

$$|h_m(T, d) - h_m(T, d')| < \varepsilon \quad (r \text{ groß genug}).$$

Ebenso folgt ähnlich wie im letzten Beweis durch eine einfache kombinatorische Überlegung für r groß genug (d.i. δ_r klein genug)

$$\max_{q_r \leq j \leq q_{r+1}-1} |\{C \in d' \mid C \cap A_j \neq \emptyset\}| \leq \prod_{k=m}^n (6p_k^2 + 2)^{[6p_r/p_k] + 1} \cdot (p_k + 1)^{[6p_r/p_k] + 1}.$$

Dies rechnet man nun so nach:

Es existiert $\eta > 0$ mit

$$|\{A \in a_k \mid \text{In } A \cap K_\eta(x) \neq \emptyset\}| \leq (6p_k^2 + 2)$$

für jedes $k \in \{m, \dots, n\}$.

Für alle $r \in \mathbb{N}$ groß genug folgt dann

$$d(T^i A_j) < \eta \quad (-3p_r \leq i \leq 3p_r; q_r \leq j \leq q_{r+1}-1).$$

Zu jedem $j \in \{q_r, \dots, q_{r+1}-1\}$ definiert man sodann:

$$M_j := \{(i_{-3p_r}, \dots, i_{3p_r}) \mid \text{In } \bigcap_{k=-3p_r}^{3p_r} T^{-k} A'_{i_k} \cap \text{In } A_j \neq \emptyset$$

$$\text{mit } A'_{i_k} \in c_m^n \text{ für } -3p_r \leq i_k \leq 3p_r\},$$

$$M_j(k_1(m), \dots, k_{s_m}(m), k_1(m+1), \dots, k_{s_n}(n)) :=$$

$$= \{(i_{-3p_r}, \dots, i_{3p_r}) \in M_j \mid A'_{i_{k_1}(t)} \in a_t \cap V_t \text{ für}$$

$$1 \leq l \leq s_t; m \leq t \leq n; A'_{i_k} = \bigcup_{t=m}^n V_t \text{ sonst}\},$$

$$I_{s_m, s_{m+1}, \dots, s_n}^j = \{M_j(k_1(m), \dots, k_{s_n}(n)) \neq \emptyset \mid -3p_r \leq k_1(t) \leq 3p_r$$

$$1 \leq l \leq s_t, m \leq t \leq n\}.$$

Die Bedingung 6.) des Satzes 2.2.4 impliziert

$$|M_j(k_1(m), \dots, k_{s_n}(n))| \leq \prod_{t=m}^n (6p_t + 2)^{s_t}.$$

Aus $k_{l+1}(t) - k_l(t) \geq p_t$ für $1 \leq l \leq s_t-1$ und $m \leq t \leq n$

und aus $|k_l(t) - k_{l'}(t')| > p_t$ für $1 \leq l \leq s_t, 1 \leq l' \leq s_{t'}$,

und $t < t'$ folgt durch eine leichte Überlegung:

$$|L_{s_m}^j \dots s_n| \leq \prod_{t=m}^n \left(\left\lfloor \frac{6p_r}{p_t} \right\rfloor + 1 \right) \cdot p_t^{s_t}.$$

Daraus folgt

$$|M_j| = \sum_{k_1(m), \dots, k_{s_n}(n)} |M_j(k_1(m), \dots, k_{s_n}(n))|$$

$$\leq \prod_{t=m}^n \sum_{s_t=0}^{\left\lfloor \frac{6p_r}{p_t} \right\rfloor + 1} \left(\left\lfloor \frac{6p_r}{p_t} \right\rfloor + 1 \right) \cdot p_t^{s_t} \cdot (6p_t^2 + 2)^{s_t}$$

Daraus leitet man sofort

$$H_m(d' \vee a_r | a_r) \leq \sum_{k=m}^n p_r^{-1} \cdot \left(\left\lfloor \frac{6p_r}{p_k} \right\rfloor + 1 \right) \cdot \log(6p_k^2 + 2)(p_k + 1)$$

und

$$|h_m(T, a_r) - h_m(T, d' \vee a_r)| < \varepsilon \quad (r \text{ groß genug})$$

ab.

Es folgt also für alle $r \geq r_0$:

$$h_m(T, a_r) \geq h_m(T, d' \vee a_r) - \varepsilon$$

$$\geq h_m(T, d') - \varepsilon$$

$$> h_m(T, d) - 2\varepsilon.$$

Beachtet man nun noch, daß

$$m\left(\bigcup_{j=-3p_r}^{3p_r} T^j \bigcup_{k \geq r} V_k\right) = 1$$

gilt, so folgt

$$h_m(T, d) = h_m(T, c_m^n) .$$

Man erhält also

$$h_m(T, a_r) \geq h_m(T, c_m^n) - 2\varepsilon \geq h_m(T) - 3\varepsilon .$$

Die umgekehrte Ungleichung ist natürlich trivial.

Ich will nun den Beweis von Satz 2.3.2' nachholen:

Beweis des Satzes 2.3.2':

Ich benutze die Bezeichnungen, die im Zusammenhang mit Satz 2.2.4 eingeführt und verwendet wurden.

Als Vorbereitung werde ich zunächst

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \log p \left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j} a_n \right) \right) = 0$$

zeigen.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Halten wir $x \in X$ und $m \in \mathbb{N}$ vorerst fest.

Wir definieren

$$M_x := \{(i_0, \dots, i_{m-1}) \mid x \in \bigcap_{j=0}^{m-1} T^{-j} \overline{A_{i_j}^1}; A_{i_j}^1 \in a_n\}$$

und für festes $k_1, \dots, k_s \in \{0, \dots, m-1\}$ ($s \in \mathbb{N}$) sei

$$M_x(k_1, \dots, k_s) := \{(i_0, \dots, i_{m-1}) \in M_x \mid q_n \leq i_{k_j} \leq q_{n+1}-1\}$$

$$A_{i_{k_j}}^1 = A_{i_{k_j}} \quad \text{für } 1 \leq j \leq s; i_1 \notin \{q_n, \dots, q_{n+1}-1\} \text{ sonst} .$$

Schließlich sei noch

$$L_s := \{ \emptyset \neq M_x(k_1, \dots, k_s) \mid 0 \leq k_j \leq m-1; k_i \neq k_j \text{ für } i \neq j \}$$

für jedes $s \in \mathbb{N}$.

Die Bedingung 6.) des Satzes 2.2.4 ist nun gerade die Abschätzung

$$|M_X(k_1, \dots, k_s)| \leq (6p_n^2 + 2)^s,$$

und die Bedingung 3.) sagt, aus, daß für $s > \lfloor m/p_n \rfloor + 1$

jede Menge $M_X(k_1, \dots, k_s) = \emptyset$ ist. Ferner folgt aus

$$|k_{i+1} - k_i| > p_n \quad \text{für } 2 \leq i \leq s:$$

$$|L_s| \leq \binom{\lfloor m/p_n \rfloor}{s} \cdot p_n^s.$$

Die Gleichheit $M_X = \sum_{k_1, \dots, k_s} M_X(k_1, \dots, k_s)$ impliziert

dann mit dem oben erwähnten:

$$\begin{aligned} p(x, \bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j} a_n) &= |M_X| = \sum_{k_1, \dots, k_s} |M_X(k_1, \dots, k_s)| \\ &= \sum_{s=0}^{\lfloor m/p_n \rfloor + 1} \sum_{k_1, \dots, k_s} |M_X(k_1, \dots, k_s)| \\ &\leq \sum_{s=0}^{\lfloor m/p_n \rfloor + 1} \sum_{k_1, \dots, k_s} (6p_n^2 + 2)^s \\ &= \sum_{s=0}^{\lfloor m/p_n \rfloor + 1} |L_s| \cdot (6p_n^2 + 2)^s \\ &\leq (6p_n^2 + 2)^{\lfloor m/p_n \rfloor + 1} \cdot \sum_{s=0}^{\lfloor m/p_n \rfloor + 1} |L_s| \\ &\leq (6p_n^2 + 2)^{\lfloor m/p_n \rfloor + 1} \cdot \sum_{s=0}^{\lfloor m/p_n \rfloor + 1} \binom{\lfloor m/p_n \rfloor + 1}{s} \cdot p_n^s \\ &= (6p_n^2 + 2)^{\lfloor m/p_n \rfloor + 1} \cdot (p_n + 1)^{\lfloor m/p_n \rfloor + 1}. \end{aligned}$$

Da $x \in X$ beliebig war, folgt:

$$p\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j} a_n\right) \leq ((C_{\mathcal{H}}^2 + 1) \cdot (C_{\mathcal{H}} + 1)) \left[\frac{m}{\mathcal{H}_n}\right]^{+1}.$$

Für $m \rightarrow \infty$ erhält das

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 1/m \cdot \log p\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j} a_n\right) \leq \mathcal{H}_n^{-1} \cdot \log((C_{\mathcal{H}}^2 + 1) \cdot (C_{\mathcal{H}} + 1)).$$

Läßt man nun noch $n \rightarrow \infty$ streben, so erhält man die gewünschte Gleichung.

Nach dieser Vorbereitung beweise ich den Satz durch Widerspruch.

Angenommen es gilt $\mathcal{H}_{\mathcal{H}}(T) < \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_n(S, \mathcal{H}_n)$. Aus Lemma 2.3.2

weiß man zunächst, daß $\mathcal{H}_{\mathcal{H}}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\mathcal{H}}(T, \mathcal{H}_n)$ gilt.

$$\text{Sei } c := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_n(S, \mathcal{H}_n) - \mathcal{H}_{\mathcal{H}}(T).$$

Wir bestimmen $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für $n \geq n_0$

$$\text{i) } \mathcal{H}_n(S, \mathcal{H}_n) > \mathcal{H}_{\mathcal{H}}(T) + c/4$$

$$\text{ii) } \lim_{m \rightarrow \infty} 1/m \cdot \log p\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j} a_n\right) < c/4$$

gilt.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Unter Anwendung des Satzes von Shannon, McMillan und Breiman (vgl. [2]) findet man $m_0 \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Sei induktiv zu $a_n = \{C_1, \dots, C_r\}$ $r = Q_{n+1} \cdot \mathcal{H}_n$

$$\mathcal{H}_n(C_1, \dots, C_r) = \bigcap_{j=1}^r \mathcal{H}_n(C_j)$$

$$A(i_1, \dots, i_{k_0}) := \bigcap_{k=1}^{k_0} \overline{\text{In } C_{i_k}} \setminus \bigcup_{j > k_0}^r \bigcap_{l_1, \dots, l_j} A(l_1, \dots, l_j)$$

definiert. Wir setzen

$$a'_n := \{\text{In } A_j, A(i_1, \dots, i_k), (\bigvee_n \mid q_n \leq j \leq q_{n+1}-1 ;$$

$$1 \leq i_1 \leq r; 1 \leq k \leq q_{n+1}-q_n\}.$$

Da m ergodisch ist, gilt dies auch für gm . m_0 sei dann so groß gewählt, daß es zu jedem $m \geq m_0$ Mengen

$$B_1, \dots, B_{l_m} \in \bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j} a'_n \text{ mit}$$

$$2^{-m(h_{gm}(T, a'_n) + \varepsilon/3)} \leq gm(B_i) \leq 2^{-m(h_{gm}(T, a'_n) - \varepsilon/3)} \quad (1 \leq i \leq l_m)$$

$$\text{und} \quad gm\left(\bigcup_{i=1}^{l_m} B_i\right) > 1 - \varepsilon/3 \text{ gibt.}$$

$$b) \text{ Für } m \geq m_0 \text{ gibt es Mengen } Z_1, \dots, Z_{k_m} \in \bigvee_{j=0}^{m-1} S^{-j} b_n \text{ mit}$$

$$2^{-m(h_m(S, b_n) + \varepsilon/3)} \leq m(Z_i) \leq 2^{-m(h_m(S, b_n) - \varepsilon/3)} \quad (1 \leq i \leq k_m)$$

$$\text{und} \quad m\left(\bigcup_{i=1}^{k_m} Z_i\right) > 1 - \varepsilon/3.$$

$$\text{Sei } \delta := \bigcup_{A \in a_n} (\overline{\text{In } A} \setminus \text{In } A). \text{ Es gibt dann ein } F \in \mathcal{U}\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j} a'_n\right)$$

$$\text{mit } gm(F) < \varepsilon/3 \text{ und } \delta \subset \sum_{i=1}^{N_0} B_{j_i} + F. \quad (N_0 \leq l_m)$$

Betrachten wir nun ein festes B_i ($1 \leq i \leq l_m$). Ich will

für $x, y \in B_i$ $M_x = M_y$ zeigen. Angenommen, dies gilt

nicht; etwa sei $(i_0, \dots, i_{m-1}) \in M_x \setminus M_y$. Dann muß es

ein $k \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $T^k(x) \in \overline{\text{In } A_{i_k}}$ und $T^k(y) \notin \overline{\text{In } A_{i_k}}$

geben. Nun existiert $A(1_1, \dots, 1_t)$, das $T^k(x)$ und $T^k(y)$ enthält. Da für ein $1 \leq j \leq t$ $C_{1_j} = A_{i_k}$ gelten muß, folgt hieraus

$T^k(y) \in \overline{\text{In } A_{i_k}}$. Widerspruch!

Mit anderen Worten heißt das, daß, wenn immer für

$A \in \bigcup_{j=0}^{m-1} T^{-j} a_n \quad B_i \cap \overline{\text{In } A} \neq \emptyset$ gilt, schon $B_i \subset \overline{\text{In } A}$

folgt. Wir können also $M_i := M_x \quad (x \in B_i; 1 \leq i \leq l_m)$

definieren.

Wir wissen also damit $B_i \subset \text{In} \left(\bigcup_{(i_0, \dots, i_{m-1}) \in M_i} \bigcap_{j=0}^{m-1} T^{-j} \overline{\text{In } A_{i_j}} \right)$.

Die Abbildung g war so konstruiert, daß

$$g^{-1}(x) \subset \bigcup_{(j_k) \in M_x} \bigcap_{k=0}^{m-1} S^{-k}[j_k]_0$$

für jeden aperiodischen Punkt gilt. Daraus folgt

$$g^{-1} \left(\text{In} \left(\bigcup_{(i_0, \dots, i_{m-1}) \in M_i} \bigcap_{j=0}^{m-1} T^{-j} \overline{\text{In } A_{i_j}} \right) \cap g(\Omega \cap N^Z) \right) \subset$$

$$\bigcup_x \bigcup_{(j_0, \dots, j_{m-1}) \in M_x} \bigcap_{k=0}^{m-1} S^{-k}[j_k]_0 = \bigcup_{(j_0, \dots, j_{m-1}) \in M_i} \bigcap_{k=0}^{m-1} S^{-k}[j_k]_0$$

Es folgt also weiterhin

$$gm(B_i) = m(g^{-1}B_i) \leq m \left(\bigcup_{(j_0, \dots, j_{m-1}) \in M_i} \bigcap_{k=0}^{m-1} S^{-k}[j_k]_0 \right).$$

Nun ist es sofort klar, daß wir die Abschätzung

$$gm \left(\bigcup_{i=1}^{N_0} B_{i_1} \right) \leq \sum_{(j_0, \dots, j_{m-1}) \in \bigcup_{i=1}^{N_0} M_{i_1}} m \left(\bigcap_{k=0}^{m-1} S^{-k}[j_k]_0 \right)$$

$$< \sum_{i=1}^N m(Z_1) + \epsilon/3.$$

Für N gilt dabei

$$N \leq N_0 \cdot \max_{1 \leq i \leq N_0} |M_i| \leq N_0 \cdot p \left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j} a_n \right).$$

Aus a) folgt nun

$$N_0 \leq 2^m (h_{gm}(T, a'_n) + \epsilon/3) + \epsilon/3.$$

Benutzen wir noch b) und fassen zusammen:

$$\begin{aligned} gm \left(\bigcup_{i=1}^{N_0} B_{1_i} \right) &\leq N \cdot 2^{-m} (h_m(S, b_n) - \epsilon/3) + \epsilon/3 \\ &\leq p \left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j} a_n \right) 2^{-m} (h_m(S, b_n) - h_{gm}(T, a'_n) - 2\epsilon/3) + \epsilon/3. \end{aligned}$$

Ist m nun groß genug, so gilt

$$p \left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j} a_n \right) < 2^{-m} (c/4 + \epsilon/3).$$

Für $\epsilon < c/4$ folgt daraus

$$\begin{aligned} gm \left(\bigcup_{i=1}^{N_0} B_{1_i} \right) &< 2^{-m} (h_m(S, b_n) - h_{gm}(T, a'_n) - \epsilon - c/4) + \epsilon/3 \\ &\leq \epsilon/3 + 2^{-m} (3 \cdot c/4 - c/4 - c/4) = 2^{-mc/4} + \epsilon/3. \end{aligned}$$

Falls wiederum m groß gewählt wurde, erhalten wir

$$gm \left(\bigcup_{i=1}^{N_0} B_{1_i} \right) < \epsilon/3 + \epsilon/3.$$

Was folgt, ist

$$gm(\delta) < \epsilon.$$

$\epsilon > 0$ war beliebig angenommen worden. Deshalb $gm(\delta) = 0$.

Wir haben also damit gezeigt, daß a_n gm-randlose Mengen enthält. Mit dieser Bemerkung sind wir aber schon fast am Ende.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{gm} \left(\bigcap_{k=0}^{m-1} T^{-k} A_{i_k}' \right) &= \text{gm} \left(\bigcap_{k=0}^{m-1} T^{-k} I_n A_{i_k}' \right) \\ &\leq m \left(\bigcap_{k=0}^{m-1} S^{-k} B_{i_k}' \right). \end{aligned}$$

Da dies für jede Wahl $(i_0, \dots, i_{m-1})$ richtig ist, folgt Gleichheit in dieser Abschätzung.

Das heißt aber nichts anderes als

$$h_m(S, b_n) = h_{gm}(T, a_n).$$

Beachtet man noch, daß $n \geq n_0$ beliebig war, so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_m(S, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{gm}(T, a_n) = h_{gm}(T).$$

Dies ist nun der erhoffte Widerspruch!

Bemerkung: Stellt man an das Maß m die zusätzliche Bedingung $h_m(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_m(S, b_n)$, so gilt natürlich $h_m(S) = h_{gm}(T)$.

Man muß nur beachten, daß allgemein $h_m(S) \geq h_{gm}(T)$ für transportierte Maße gilt.

Es sei hier noch der Vollständigkeit halber angeführt, daß man nicht verlangen muß, daß das transportierte Maß gm aperiodisch ist. Der Beweis verläuft genau so, wie der eben geführte. Es stellt sich dann eben am Schluß heraus, daß

$\lim_{n \rightarrow \infty} h_m(S, b_n) = 0$ gilt. Dessen ungeachtet kann natürlich

immer noch $h_m(S) > 0$ gelten.

Für jedes Borelmaß m auf $\Omega \cap \mathbb{N}^2$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$h_m(S, b_n) \leq \bar{h}(S, b_n) \quad (\text{vgl. Satz 1.1.6})$$

Ohne Kenntnis des Goodman'schen Satzes [8] stellt sich im Anschluß an diesen letzten Satz die Frage nach der Beziehung zwischen $h(T)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{h}(T, a_n)$. Diese erläutert das folgende Lemma.

Lemma 2.3.3:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{h}(T, a_n) \geq h(T) .$$

Beweis:

Ich benutze wieder die bis jetzt gebrauchten Bezeichnungen.

Sei $b_n := \{A_i; B_j^n; \bigcup_{m \geq n} V_m \mid q_n \leq i \leq q_{n+1}-1; 1 \leq j \leq s_n\}$

eine topologische Zerlegung von X , so daß

$$d(T^k B_j^n) < \delta_n \quad \text{für } -3p_n \leq k \leq 3p_n$$

und $1 \leq j \leq s_n$ gilt.

Sei $c_n := \bigvee_{k=-3p_n}^{3p_n} T^k b_n$ eine topologische Zerlegung, wie sie

im Anschluß an Lemma 1.1.3 beschrieben wurde. Wir können zusätzlich an c_n die Forderung stellen, daß $d(C) \leq \delta_n (C \in c_n)$ gilt. Dies ist deshalb möglich, weil für jedes

$$B \in \bigvee_{k=-3p_n}^{3p_n} T^k b_n$$

mit $\ln B \neq \emptyset$ $d(B) < \delta_n$ gilt. Wir haben also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup \{d(C) \mid C \in c_n\}) = 0 .$$

Wenden wir nun Corollar 1.1.5 an, so folgt

$$h(T) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{h}(T, c_n) .$$

Lemma 1.1.3 besagt $\overline{h}(T, b_n) = \overline{h}(T, c_n)$

Ich zeige also noch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{h}(T, a_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{h}(T, b_n) .$$

Sei $p \in \mathbb{N}$ und $\text{In} \bigcap_{j=0}^{p-1} T^{-j} A'_{1_j} \neq \emptyset \quad (A'_{1_j} \in a_n) .$ Für

$$M(i_0, \dots, i_{p-1}) := \{(l_0, \dots, l_{p-1}) \mid \emptyset \neq \text{In} \bigcap_{j=0}^{p-1} T^{-j} D_{1_j} \subset$$

$$\subset \text{In} \bigcap_{j=0}^{p-1} T^{-j} A'_{1_j} \quad (D_{1_j} \in b_n)\}$$

gilt - wie man sofort sieht -

$$|M(i_0, \dots, i_{p-1})| \leq |b_n|^{[p/p_{n+1}]} + 1 .$$

Daher folgt

$$N\left(\bigvee_{j=0}^{p-1} T^{-j} b_n\right) \leq |b_n|^{[p/p_{n+1}]} + 1 \cdot N\left(\bigvee_{j=0}^{p-1} T^{-j} a_n\right)$$

Für $p \rightarrow \infty$ impliziert das

$$\overline{h}(T, b_n) \leq p_{n+1}^{-1} \cdot \log |b_n| + \overline{h}(T, a_n) .$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{h}(T, b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{h}(T, a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1}^{-1} \cdot \log |b_n| .$$

Ich brauche also nur noch zu bemerken, daß nach Voraussetzung an die p_n in Satz 2.2.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1}^{-1} \cdot \log |b_n| = 0$$

angenommen werden kann.

Mit diesem Lemma und dem letzten Satz hat man schon eine wesentliche Vorarbeit auf folgendes Problem geleistet. Die Sätze von Goodwyn [9] und Goodman [8] - die man ohne größere Mühe unter Benutzung der Zerlegungsfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ herleiten kann - lassen die Frage offen, wann ein normiertes, T-invariantes Borelmaß m auf X mit $h_m(T) = h(T)$ existiert. Man ist also jetzt in der Lage, dieses Problem auf ein symbolisches dynamisches System zurückzuführen. Ich fasse dies abschließend in einem Satz zusammen:

Satz 2.3.3:

Sei (X, T) ein dynamisches System und (Ω, S) das vermöge Satz 2.2.4 zugeordnete symbolische dynamische System. Genau dann existiert ein normiertes, T-invariantes Borelmaß μ auf X mit $h_\mu(T) = h(T)$, wenn ein normiertes, S-invariantes Borelmaß m auf $\Omega \cap \mathbb{N}^2$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h_m(S, b_n) > h(T)$ existiert.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. Adler, A.G. Konheim, M.H. McAndrew:
Topological Entropy; Transactions AMS 114 (1965), 309-319
- [2] P. Billingsley:
Ergodic Theory and Information; John Wiley and Sons,
New York 1965
- [3] R. Bowen:
Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms;
erscheint in Transactions AMS
- [4] R. Bowen:
Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms; Univer-
sity of Warwick 1970
- [5] R. Bowen:
Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces;
Transactions AMS 153 (1971), 401-413
- [6] M. Denker:
Topological entropy and the construction of a measure.
Colloque de theorie ergodique, Paimpol 1970
- [7] E.I. Dinaburg:
The relation between topological entropy and metric
entropy; Dokl. Akad. Nauk. SSSR 190 (1970) Nr.1
= Soviet Math. Dokl. 11 (1970) Nr.1 , 13-16
- [8] T.N.T. Goodman:
Relating topological entropy with measure theoretic en-

tropy; Bull. London Math. Soc. 3 (1971), 176-180

[9] L. Goodwyn:

Topological entropy bounds measure theoretic entropy;
Proc. AMS 23 (1969) , 679-688

[10] W.H. Gottschalk, G. Hedlund:

Topological Dynamics; Amer. Math. Soc. Coll. Publ.
Vol. 36 Providence, R.I. (1955)

[11] K. Jacobs:

Maß und Integral; Vorlesungsausarbeitung, Universität
Erlangen

[12] K. Jacobs:

Lecture Notes on Ergodic Theory; Aarhus Universitet

[13] J.L. Kelley:

General Topology; Van Nostrand, Princeton, N.J. 1955

[14] H.B. Keynes, J.B. Robertson:

Generators for topological entropy and expansiveness;
Math. System Theory 3 (1969), 51-59

[15] A.N. Kolmogorov, V.A. Tihomirov:

ϵ -entropy and ϵ -capacity of sets in functional spaces;
Uspehi Mat. (N.S.) 14 (1959) Nr. 2 (86), 3-86 =
AMS Translations (2) 17 (1961) , 277-367

[16] W. Parry:

Entropy and Generators in Ergodic Theory; Math. Lecture
Notes Series, Benjamin New York 1969

- [17] W.L. Reddy:
Lifting expansive homeomorphisms to symbolic flows;
Math. System Theory 2 (1968), 91-92
- [18] V.A. Rohlin:
Lectures on the entropy theory of measure preserving
transformations; Uspehi Mat Nauk (1967) 22 (5), 3-56
= Russ. Math. Surveys (1967) 22 (5), 1-52
- [19] Y.G. Sinai:
Markov partitions and C-diffeomorphisms; Functional
Analysis and its Applications 2 (1968) Nr.1, 64-89

LEBENS LAUF

Ich wurde am 20. Juni 1944 als Sohn des Beamten Will Denker in Breslau geboren. Vier Jahre lang besuchte ich von 1950 an die Volksschule und anschließend neun Jahre die Oberschule in verschiedenen Orten, zuletzt in Landshut, wo ich 1963 das Abitur bestand. Nach einem dreijährigen Wehrdienst begann ich im WS 1966/67 mit dem Mathematikstudium in Erlangen. Ich machte im November 1968 das Vordiplom in Mathematik. Das akademische Jahr 1969/70 studierte ich mithilfe eines Stipendiums der Studienstiftung an der Universität in Coventry. Nach meiner Rückkehr legte ich im November 1970 die Diplomprüfung in Mathematik ab. Vom Herbst 1968 war ich für ein Jahr als Hilfskraft am Mathematischen Institut beschäftigt, von April 1969 bis November 1970 war ich zudem Stipendiat der Studienstiftung, und seit Dezember 1970 bin ich als Verwalter einer Assistentenstelle am Mathematischen Institut angestellt.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel.22990